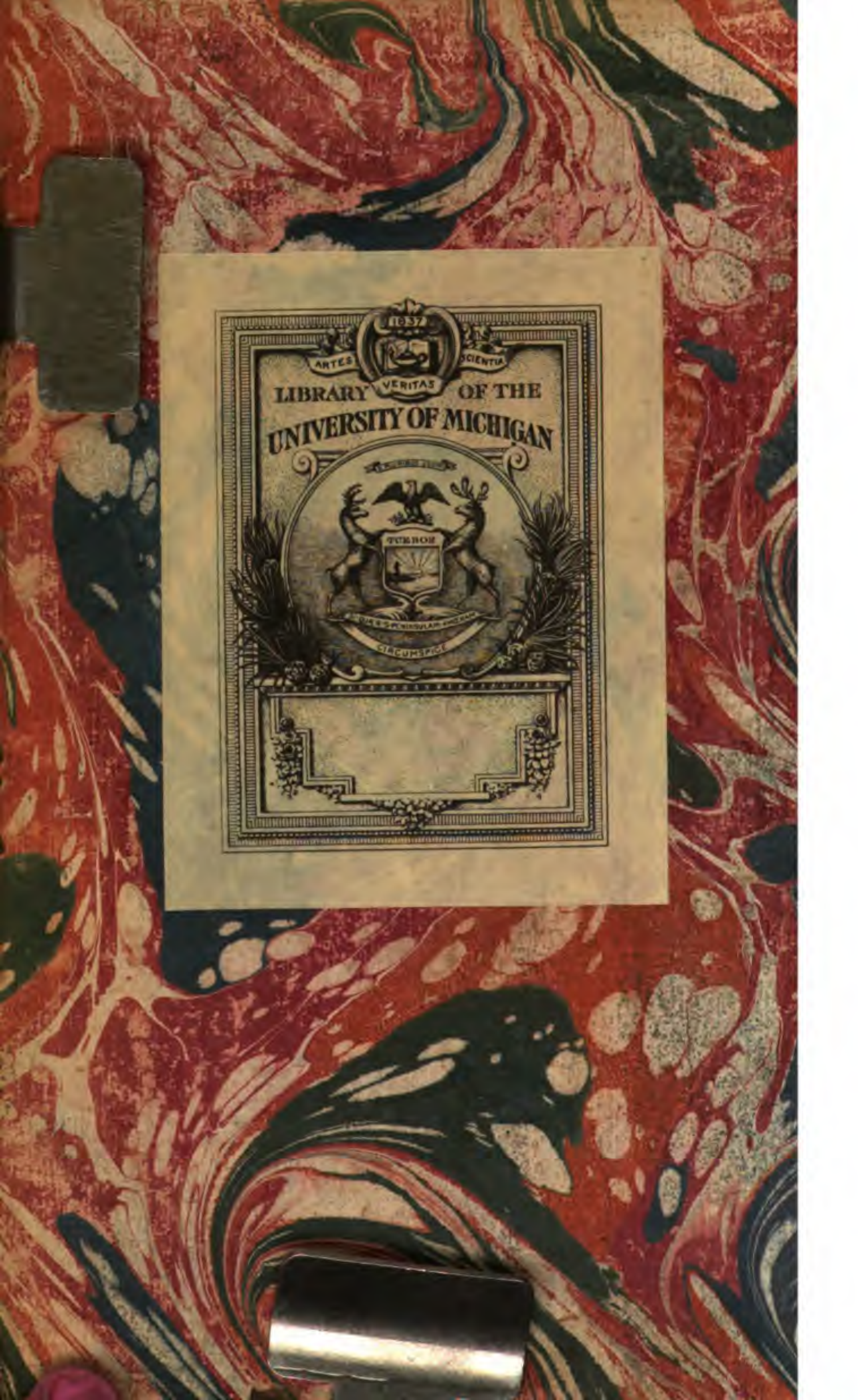
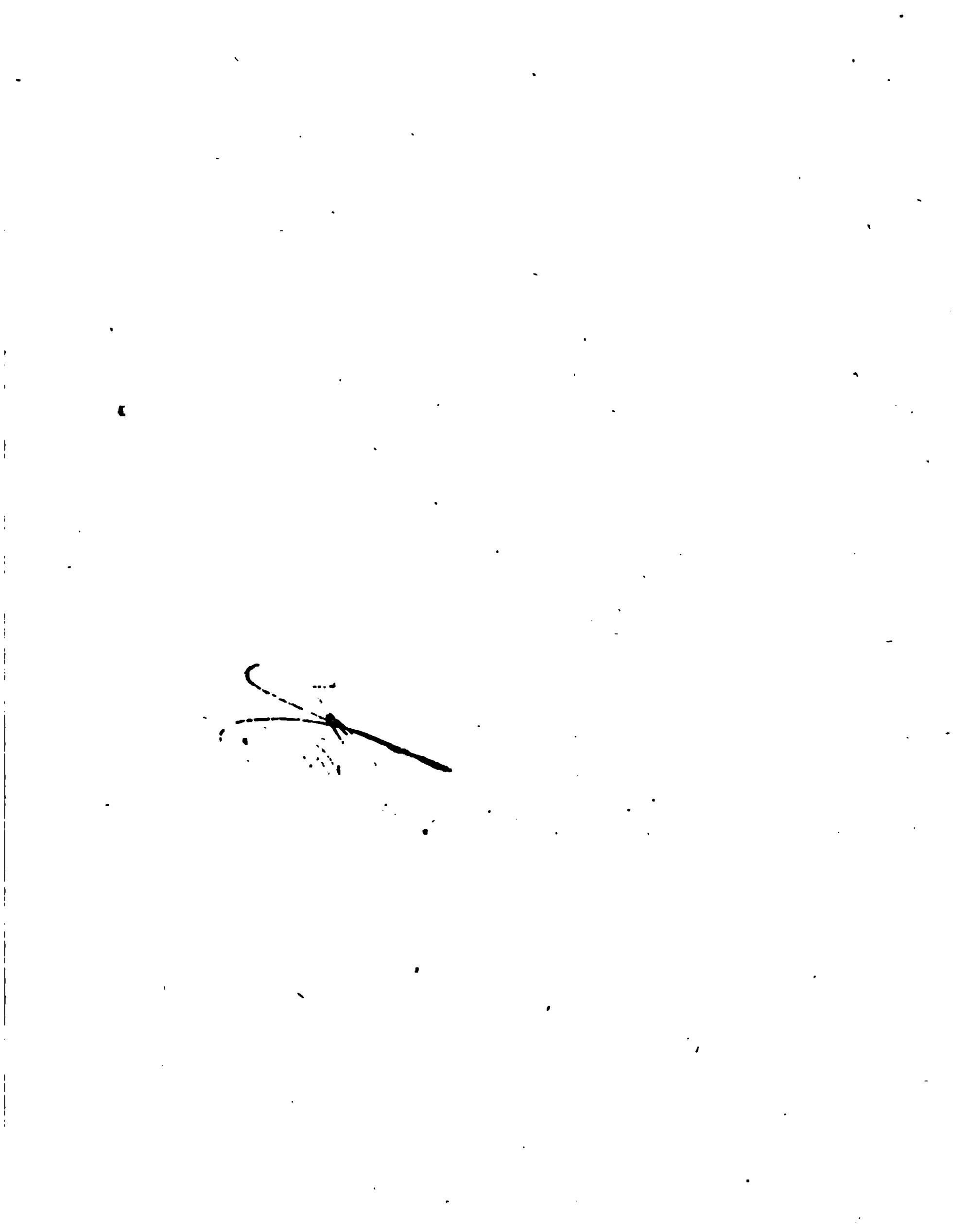










COURS DE MATHÉMATIQUE.

SECONDE PARTIE.

ÉLÉMENS *DE GÉOMÉTRIE* THÉORIQUE ET PRATIQUE.

Charles Etienne Louis

PAR M. CAMUS

De l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture.



A PARIS,

Chez DURAND, Libraire, rue saint Jacques au Griffon.

M. D. CC. L.

Avec Approbation & Privilége du Roi.



PRÉFACE.

EN travaillant à cette ſeconde Partie du Cours de Mathématique dans lequel j'ai promis de réunir les élémens des Sciences propres à un Ingénieur, je me ſuis propoſé de raſſembler les Propoſitions de Géométrie néceſſaires pour entendre facilement toutes les parties de cette Science qu'on peut traiter ſynthétiquement, & d'indiquer les principaux uſages qu'on peut faire de ces Propoſitions dans la Pratique. Je n'en ai donc pas toujours pouſſé l'application auſſi loin que le ſujet paroiſſoit le demander, lorſque ce ſujet méritoit un traité particulier un peu étendu, ou qu'il exigeoit la démonſtration de quelques Théorêmes qu'il n'étoit pas naturel de placer dans des Elémens de Géométrie.

Ce Traité eſt partagé en dix Livres, précédés des Notions préliminaires qu'il faut avoir des trois eſpéces d'Etendues qui ſont l'objet de la Géométrie, des Principes généraux ſur leſquels elle eſt fondée, des différentes ſortes de Propoſitions qui la compoſent, & des divers Signes dont on y fait uſage pour abréger les démonſtrations.

Dans le premier Livre j'explique les propriétés générales des Lignes droites dans le cas où

elles se rencontrent, & dans celui où elles ne peuvent point se rencontrer, celles qui naissent de la rencontre d'un Cercle avec des Lignes droites ou avec d'autres Cercles, les Problêmes qu'on en peut déduire pour la Pratique, & la mesure des Angles dans les quatre positions qu'ils peuvent avoir à l'égard de la Circonférence.

Dans le second Livre, je traite des Superficies & de leurs figures; j'y explique la nature & les propriétés générales des Triangles & des Parallélogrammes, & ce qui constitue leur égalité ou leur inégalité; la maniere de trouver leurs aires relativement aux mesures de leurs bases & de leurs hauteurs; j'y considere les Polygones en général & l'Exagone en particulier, l'aire d'un Polygone régulier quelconque, celle du Cercle & de ses parties: enfin j'y enseigne à réduire les figures rectilignes à des figures plus simples, & j'explique par ce moyen l'addition, la soustraction, la multiplication & la division de ces Figures.

Le troisiéme Livre est une théorie assez étendue des Rapports & des Proportions géométriques. J'y explique non seulement les différentes Regles qu'on peut suivre pour changer une Proportion en d'autres Proportions, mais encore la maniere de conclurre une Proportion de plusieurs autres dont les Rapports sont différens; ce qui me donne dans la suite beaucoup de facilité pour démontrer un grand nombre de Propositions. Enfin, j'y donne la méthode de sommer les Progressions géométriques, tant celles dont le nombre des termes est fini, que celles dont le nombre des termes est infini, comme il

peut l'être dans les Progressions décroissantes.

Dans le quatriéme Livre, il est question des Rapports des Lignes. J'y considere les Lignes coupées proportionnellement, les Triangles semblables, les quatriémes & troisiémes Proportionnelles à trois Lignes ou à deux Lignes données, & les Lignes qui concourent en un même Point. J'y donne une idée générale des Polygones semblables, & de leur division en parties semblables. J'y expose la nature & les propriétés des Points semblablement placés ; ce qui me conduit à expliquer l'art de lever les Plans, au sujet duquel je n'entre pas dans un grand détail, parce qu'il demande un traité particulier. Enfin, je termine ce Livre par l'examen des Rapports des Lignes homologues & des contours des Figures semblables ; ce qui me donne occasion de parler de l'addition, de la soustraction, de la multiplication & de la division de ces contours.

Le cinquiéme Livre a pour objet les Rapports des surfaces & principalement de celles des Figures semblables. J'y démontre les Rapports des Figures semblables dont les côtés homologues forment un Triangle rectangle ; & cette théorie me fournit une méthode pour l'addition, soustraction, multiplication & division des Figures semblables. J'y démontre aussi les Rapports des Quarrés construits sur les côtés d'un Triangle quelconque ; d'où je déduis la démonstration de plusieurs Théorêmes utiles dans la Pratique.

Dans le sixiéme Livre, je considere les Lignes coupées en parties réciproquement proportionnelles entr'elles ou à leurs totalités ; j'en tire les différentes constructions des Moyennes propor-

tionnelles ; & j'en fais voir l'usage dans la Pratique pour transformer un Triangle ou un Polygone quelconque en une autre Figure semblable à une Figure donnée. J'y enseigne aussi à couper des Lignes en moyenne & extrême Raison, & je montre l'application de ces Lignes à la division de la circonférence du Cercle en dix parties égales. J'y considere encore les Lignes coupées en trois Segmens, dont l'un est Moyen proportionnel entre les deux autres ; & je fais usage de ces Lignes pour la division des Plans rectilignes, ou pour mener par un Point donné une Ligne qui retranche d'un Polygone quelconque une partie de grandeur donnée.

Le septiéme Livre qui traite de la rencontre des Plans entr'eux & avec des Lignes droites, n'est qu'une préparation au huitiéme, dans lequel je parle des Solides.

Les Solides dont il est question dans le huitiéme Livre, se réduisent au Prisme, au Cylindre, à la Pyramide, au Cône & à la Sphere. En considérant leurs surfaces & leurs solidités, je fais dépendre leur mesure de celle des Lignes qui peuvent rendre les opérations plus courtes & plus commodes.

Le Livre neuviéme est un Traité de Trigonométrie plane, dans lequel après avoir expliqué & éclairci par un grand nombre d'exemples la construction des Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes & de leurs Logarithmes, je donne la résolution des triangles rectilignes, rectangles & non rectangles.

Dans le Livre dixiéme, après avoir parlé de de la mesure des Arcs & des portions de Cercles,

J'examine une espéce de Demi-ovale que les Praticiens substituent à l'Ellipse dans la construction des Voutes. Cette Courbe qu'ils nomment *Anse de Panier* est ordinairement composée de trois portions de Cercles qu'ils décrivent suivant différentes méthodes plus ou moins exactes. J'en donne, pour un diamétre & une hauteur quelconques, une construction géométrique que je compare avec les constructions reçues, pour déterminer en quoi & de combien ces dernieres pèchent dans la Pratique. Je donne ensuite une méthode fort simple pour toiser la longueur de cette espéce de Courbe.

Enfin je propose différentes méthodes pour construire & pour toiser des Anses de Panier à cinq centres, lesquelles ressemblent mieux à l'Ellipse que les précédentes, & peuvent avec plus de raison en tenir lieu dans les Toisés. Ces Courbes n'étant point déterminées par le diamétre & la montée des Anses & par le nombre de degrès de chacun des Arcs qui les composent, je les détermine en ajoutant différentes conditions propres à rendre leur forme plus agréable.

Si l'on joint ce qui est dit dans ce dixiéme Livre de l'Ellipse & des Anses de Panier, avec ce qu'on a vû du Cylindre dans le huitiéme, on aura une théorie suffisante des Voûtes en berceau, circulaires, surmontées & surbaissées. Comme les Dômes en plein cintre sont des Demi-spheres dont on a assez parlé dans le huitiéme Livre, il faudroit pour compléter la théorie du Toisé des Voûtes, considérer encore les Voûtes d'arrête, & celles en Arc de cloître en

plein cintre ſurbaiſſées & ſurmontées. Mais ce Traité étant déjà trop long, je me réſerve à parler de ces dernieres Voûtes dans le Traité ſuivant, où j'aurai occaſion d'expliquer quelques Propoſitions dont leur toiſé dépend.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

MEſſieurs Nicole & Clairaut, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. *Camus* intitulé *Cours de Mathématique élémentaire*, à l'uſage des Ingénieurs, ayant fait leur rapport de la partie de ce Cours qui contient la Géométrie, & qui en doit compoſer le ſecond Volume, l'Académie a jugé cette partie de l'Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. À Paris, le 21 Mars 1750.

GRANJEAN DE FOUCHY, Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.



ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

DE L'OBJET DE LA GÉOMÉTRIE.


A GÉOMÉTRIE eſt la Science de l'Étendue. On conſidere trois eſpeces d'Étendues ; la *Ligne*, la *Superficie*, & le *Solide*.

La Ligne eſt une Étendue en longueur ſeulement.

La Superficie eſt une Étendue en longueur & largeur.

Le Solide eſt une Étendue en longueur, largeur & profondeur.

On connoît aſſez la nature du Corps mathématique, c'eſt-à-dire, de l'Étendue en longueur, largeur & profondeur ; mais on ne conçoit pas avec la même facilité ce que ſont la Ligne & la Superficie, ni comment ces deux eſpeces d'Étendues peuvent exiſter.

La Superficie n'eſt proprement que l'extrémité d'un Corps. On pourroit en quelque façon la conſidérer comme une envelope infiniment mince qui contiendroit le Corps. Or l'extrémité d'un Corps doit avoir longueur & largeur pour terminer & contenir le Corps; mais elle ne peut pas avoir d'épaiſſeur : car ſi elle avoit encore de l'épaiſſeur, elle ſeroit elle-même un Corps. Donc la Superficie eſt une Étendue en longueur & largeur ſans épaiſſeur.

La Ligne eſt le bord d'une Superficie. Or le bord d'une Superficie doit avoir de la longueur pour entourer la Superficie; mais il ne peut avoir ni épaiſſeur ni largeur. 1°. Le bord d'une Superficie ne peut point avoir d'épaiſſeur, puiſque la Superficie à laquelle il appartient n'en a point. 2°. Il ne peut pas avoir de largeur; car s'il avoit de la largeur avec ſa longueur, il ſeroit lui-même une Superficie. Donc la Ligne eſt une Étendue en longueur ſeulement.

Le *Point* eſt le bout d'une Ligne; ainſi le Point ne peut avoir ni longueur, ni largeur, ni épaiſſeur. 1°. Le Point ne peut avoir ni largeur ni épaiſſeur, puiſqu'il appartient à la Ligne qui n'en a point elle-même. 2°. Il ne peut point avoir de longueur; autrement il ſeroit une Ligne, & non pas le bout d'une Ligne.

Le Point n'eſt donc pas une Étendue; ainſi il ne peut pas faire partie de l'objet de la Géométrie.

On voit par ce qui vient d'être dit, que le Point, la Ligne & la Superficie n'exiſtent point par eux-mêmes; mais il eſt évident qu'ils exiſtent par les Corps & avec les Corps.

Quoique le Point n'ait aucune dimenſion, l'on peut le conſidérer comme le premier principe générateur de l'Étendue produite par le mouvement.

1°. Un Point qui ſe meut, décrit une Ligne; car il parcourt une longueur, ſans largeur ni épaiſſeur.

2°. Une Ligne qui ſe meut de maniere que toutes ſes parties aillent de front, parcourt une Étendue qui a longueur & largeur, & engendre par conſéquent une Superficie.

3°. Enfin une Superficie qui ſe meut de maniere que toutes ſes parties aillent de front, parcourt une Étendue qui a longueur, largeur & profondeur, & qui eſt par conſéquent un Corps.

DES PRINCIPES

ET DES AUTRES PROPOSITIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

LES Principes de la Géométrie ſont les Propoſitions fondamentales ſur leſquelles on établit la Démonſtration des autres Propoſitions.

On diſtingue trois ſortes de Principes; les *Axiômes*, les *Définitions* & les *Demandes*.

Axiômes.

On appelle *Axiôme* une Propoſition évidente par elle-même, & qui n'a pas beſoin de Démonſtration. Voici les Axiômes dont on fera uſage dans ce Traité.

I. *Une même choſe ne peut pas être & n'être pas en même temps.*

II. *Un Tout eſt égal à toutes ſes Parties priſes enſemble.*

Ainſi la moitié ou le tiers ou le quart &c d'un Tout, vaut la moitié ou le tiers ou le quart &c de toutes ſes Parties; & le double ou le triple ou le quadruple &c

d'un Tout, est égal au double ou au triple ou au quadruple &c de toutes ses Parties.

III. *Le Tout est plus grand qu'une de ses Parties.*

IV. *Si à des Grandeurs égales on ajoûte des Grandeurs égales, les Grandeurs totales qui résulteront de ces additions seront égales.*

V. *Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, ou une même Grandeur, les Restes seront égaux.*

VI. *Les Grandeurs qui sont toutes ou doubles ou triples ou également multiples d'une même Grandeur ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.*

VII. *Les Grandeurs qui sont toutes, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou également sous-multiples d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.*

VIII. *Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, ou une même Grandeur, les Touts seront inégaux; & le plus grand Tout sera celui qui contiendra la plus grande des deux Grandeurs inégales.*

IX. *Si de Grandeurs égales ou d'une même Grandeur, on retranche des Grandeurs inégales, les Restes seront inégaux; & le plus grand Reste sera celui de la Quantité dont on aura le moins retranché.*

X. *Si de Grandeurs inégales on retranche une même Grandeur, ou des Grandeurs égales, les Restes seront inégaux; & le plus grand Reste sera celui de la plus grande des deux Quantités inégales.*

XI. *Si trois Grandeurs sont telles que la premiere soit plus grande que la seconde, & la seconde plus grande que la troisiéme, la premiere sera à plus forte raison plus grande que la troisiéme.*

XII. *Les Lignes ou les Superficies qui étant appliquées les unes sur les autres conviennent parfaitement, sont égales.*

Cet Axiôme est le principe le plus simple de l'Éga-

lité; ainsi nous l'emploierons autant que nous pourrons pour démontrer l'égalité des Lignes & des Superficies.

XIII. *D'un Point à un autre, il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court de tous.*

Définitions.

Une *Définition* est la déclaration de ce qu'on entend par un Mot ou un Terme dont on veut faire usage. Ainsi les Définitions sont nécessaires pour prévenir les équivoques, en fixant la signification des Mots.

On a déjà donné quatre Définitions en expliquant ce qu'on entend par ces mots Corps, Superficie, Ligne, & Point mathématiques. *On donnera les autres Définitions à mesure qu'on en aura besoin.*

Demandes.

Les *Demandes* sont des suppositions d'Opérations qu'on peut faire sans aucune difficulté, ou qu'on peut du moins imaginer. Voici trois Demandes que nous ferons après Euclides.

1°. *Qu'il soit permis de mener une Ligne droite d'un Point quelconque à tel autre Point qu'on voudra.*

2°. *Une Ligne droite étant terminée, qu'il soit permis de la prolonger aussi loin qu'on voudra, ou d'imaginer qu'elle est prolongée.*

3°. *Qu'il soit permis de décrire un Cercle de tel Centre & de tel intervalle qu'on voudra, ou d'imaginer que ce Cercle est décrit.*

Ces trois Opérations sont si faciles & si simples, lorsqu'on sait ce que sont une Ligne droite & un Cercle, qu'on ne peut pas refuser d'accorder qu'on peut les faire, ou qu'on peut du moins les imaginer.

Des autres Propositions de la Géométrie.

Les trois sortes de Principes dont on vient de parler, servent de premiers fondemens à cinq autres especes de Propositions qui sont les *Théorêmes*, les *Problêmes*, les *Corollaires*, les *Lemmes*, & les *Scholies*.

Le *Théorême* est une Proposition dont il faut démontrer la vérité.

Le *Problême* est une Proposition dans laquelle il s'agit de découvrir une vérité, ou d'exécuter quelque chose que l'on demande.

Le *Corollaire* est une conséquence d'un Théorême démontré ou d'un Problême résolu.

Le *Lemme* est un Théorême ou un Problême déplacé, qu'on ne démontre ou qu'on ne résout que pour faciliter la Démonstration d'un Théorême ou la solution d'un Problême plus difficile.

Le *Scholie* est une remarque que l'on fait sur une Proposition pour en montrer l'utilité, ou une récapitulation de plusieurs Propositions dont on veut faire voir l'accord.

EXPLICATION DES MARQUES OU SIGNES QU'ON EMPLOIE DANS LA GÉOMÉTRIE.

LE Signe + est la marque de l'Addition. Il se nomme *Plus*, & signifie que la Grandeur qui le suit doit être ajoûtée à celle qui le précede. Par exemple, 5 + 3 veut dire qu'on ajoûte 3 avec 5; ce qui s'exprime ainsi, *Cinq plus Trois*.

Le Signe — est la marque de la Soustraction. Il se nomme *Moins*, & signifie que la Grandeur qui le suit

doit être retranchée de celle qui le précede. Par exemple, 5 — 3 signifie qu'on retranche 3 de 5; ce qui s'exprime ainsi, *Cinq moins Trois*.

Le Signe = est la marque de l'Égalité. Il se nomme *Égal*, & signifie que le terme qui le précede, ou le résultat des termes qui sont devant lui, est égal au terme qui le suit, ou au résultat des termes qui sont après lui. Par exemple, $5 + 3 = 8$ signifie que 5 *plus* 3 *est égal à* 8; & $5 + 3 = 11 - 3$ signifie que 5 *plus* 3 *est égal à* 11 *moins* 3.

Les deux Quantités séparées par le Signe =, soit qu'elles n'ayent chacune qu'un seul terme, ou qu'elles ayent chacune plusieurs termes, ou enfin que l'une ait plusieurs termes & que l'autre n'en ait qu'un, sont appelées *Membres de l'Égalité*. On appelle *Premier Membre* celui qui est à la gauche du Signe, & *Second Membre* celui qui est à sa droite.

Les deux Signes >, <, sont les marques de l'Inégalité. Le premier > s'appelle *Plus grand*, & le second < s'appelle *Plus petit*. Ils signifient l'un & l'autre que le terme ou le résultat de tout ce qu'il y a du côté de l'ouverture est plus grand que le terme ou le résultat de tout ce qui est du côté de la pointe. Par exemple, $5 + 4 > 8$ signifie que 5 *plus* 4 *est plus grand que* 8; & $8 < 5 + 4$ signifie que 8 *est plus petit que* 5 *plus* 4.

Les Grandeurs séparées par le Signe > ou par le Signe < sont appelées *Membres de l'Inégalité*. On nomme *Premier Membre* celui qui est à la gauche du Signe, & *Second Membre* celui qui est à sa droite.

Le Signe × est la marque de la Multiplication. Il s'appelle *Multiplié par*, & signifie que la Grandeur qui le précede est multipliée par celle qui le suit. Par exemple, 5×3 signifie que 5 *est multiplié par* 3.

Lorsque le Signe × est précédé de plusieurs Quan-

tités, il ne ſignifie pas toûjours que les Quantités qui ſont avant lui ſont toutes multipliées par celle qui eſt après lui. Par exemple, dans cette expreſſion 5 + 3 × 4, le Signe × qui eſt entre 3 & 4 ſignifie ſeulement que 3 *eſt multiplié par* 4; & le Signe + qui eſt entre 5 & 3 × 4 ſignifie que *le produit de* 3 *multiplié par* 4, qui eſt 12, *doit être ajoûté à* 5: en ſorte que l'expreſſion entiere 5 + 3 × 4 eſt la même choſe que 5 + 12 ou 17.

Si l'on vouloit indiquer par le Signe × que toutes les Quantités qui le précedent ſont multipliées par celle qui le ſuit, il faudroit renfermer entre deux Parenthèſes toutes les Quantités qui précedent ce Signe. Par exemple, ſi l'on vouloit marquer que la ſomme de 5 + 3 doit être multipliée par 4, il faudroit écrire (5 + 3) × 4; ce qui ſignifieroit que 5 + 3 ou 8 *doit être multiplié par* 4.

Il arrive ſouvent qu'une ou pluſieurs des Quantités qui précedent le Signe ×, ne doivent point être multipliées, & qu'il en reſte encore pluſieurs qui doivent être multipliées. Dans ce cas, on met entre deux Parenthèſes immédiatement avant le Signe × toutes les Quantités qui doivent être multipliées; & l'on met avant la premiere Parenthèſe toutes celles qui ne doivent point être multipliées. Par exemple, ſi des quatre Quantités 5 + 3 + 6 — 2 il n'y avoit que les deux dernieres 6 — 2 qui duſſent être multipliées par 4, on écriroit 5 + 3 + (6 — 2) × 4; ce qui ſignifieroit que 6 — 2 ou 4 *eſt multiplié par* 4, & que *le produit* 16 *de cette multiplication eſt ajoûté avec* 5 + 3 ou *avec* 8.

De même lorſque le Signe × eſt ſuivi de pluſieurs termes, il ne ſignifie pas toûjours que toutes les Quantités qui ſont après lui doivent multiplier celles qui ſont avant lui, & qui ſont marquées pour être

multipliées. Par exemple, $8\times4+2$ ou $(5+3)\times4+2$ ſignifie ſeulement que 8 ou $5+3$ *eſt multiplié par* 4; & le Signe $+$ qui ſe trouve entre 4 & 2 marque que 2 *doit être ajoûté au produit de cette multiplication.*

Si l'on vouloit marquer que toutes les Quantités, ou pluſieurs des Quantités qui ſont après le Signe $\times$, doivent multiplier celles ou pluſieurs de celles qui ſont avant ce même Signe, il faudroit renfermer entre des Parenthèſes immédiatement après le Signe $\times$ toutes les Quantités qui doivent multiplier, & mettre pareillement, comme nous l'avons déjà dit, entre deux Parenthèſes immédiatement avant le même Signe toutes les Quantités qui doivent être multipliées. A l'égard des Quantités qui ne doivent point être multipliées ou qui ne doivent point multiplier, on peut les mettre toutes avant le multiplicande ou après le multiplicateur, ou en mettre une partie avant le multiplicande, & une partie après le multiplicateur.

Par exemple, ſi l'on avoit d'une part $4+5-3$; & d'autre part $3+8-2$, & qu'on dût ſeulement multiplier $5-3$ par $8-2$, on pourroit écrire $4+3+(5-3)\times(8-2)$, ou $(5-3)\times(8-2)+4+3$, ou $4+(5-3)\times(8-2)+3$; ce qui ſignifieroit que *le produit* $(5-3)\times(8-2)$, ou 2×6, *doit être ajoûté avec la ſomme de* 4 *&* 3.

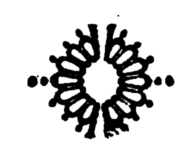
Au lieu de raſſembler entre deux Parenthèſes les Quantités qui doivent être multipliées, ou celles par leſquelles on doit multiplier, on ſe contente ſouvent de lier toutes celles qui doivent être multipliées, par une barre qu'on met au-deſſus d'elles, & de lier par une ſemblable barre toutes celles qui doivent multiplier. Par exemple : $\overline{5+3}\times4$ marque que *la ſomme de* 5 *&* 3 *eſt multipliée par* 4; $\overline{5+3}\times4+2$ ſignifie que *la ſomme de* 5 *&* 3 *eſt multipliée par* 4

& qu'on ajoûte 2 au produit ; $\overline{5+3}\times\overline{4+2}$ désigne *qu'on multiplie la somme de* 5 *&* 3 *par celle de* 4 *&* 2 ; $4+3+\overline{5-3}\times\overline{8-2}$ signifie que 5—3 ou 2 *est multiplié par* 8—2, c'est-à-dire, *par* 6, *& qu'on ajoûte au produit la somme de* 4 *&* 3.

Une Ligne horizontale entre deux Grandeurs, dont l'une est au-dessus & l'autre au-dessous, est la marque de la Division, & indique que la Quantité supérieure est divisée par la Quantité inférieure. Par exemple, $\frac{5}{3}$ signifie *qu'on divise* 5 *par* 3 ; & $\frac{5+4}{6-3}$ signifie que *la somme de* 5 *&* 4 *est divisée par la différence de* 6 *à* 3, c'est-à-dire, que 9 *est divisé par* 3.

Le Signe $\sim$ est la marque de la Ressemblance & se nomme *Semblable*. Il signifie que la Grandeur qui le précede est semblable à celle qui le suit. Par exemple, si deux Figures nommées *ABC*, *EDF*, étoient semblables, on écriroit *ABC* $\sim$ *EDF*.

On emploiera plusieurs autres Signes pour abréger les expressions dans les Démonstrations ; mais on attendra pour les expliquer qu'on ait besoin de s'en servir.





ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.

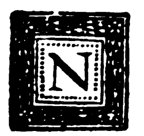
LIVRE PREMIER.

Des Lignes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes droites & courbes en général.

DÉFINITIONS.

OUS avons dit que la Ligne est une Étendue en longueur seulement.

On distingue deux sortes de Lignes en général ; la *Ligne droite* & la *Ligne courbe*.

I. La Ligne droite est le chemin le plus court entre les deux Points qui la terminent.

Le chemin le plus court d'un Point à un autre s'appelle aussi *Distance*. Ainsi la Distance d'un Point à un autre, n'est autre chose qu'une Ligne droite tirée entre ces deux Points.

Lorsque l'on coupe une Ligne, ses parties se nomment *Segmens*; & les Points où elle est coupée s'appellent *Sections*.

On a demandé 1°. Qu'il soit permis de tirer ou d'imaginer une Ligne droite d'un Point quelconque à tel autre Point qu'on voudra.

2°. Une Ligne droite étant terminée par deux Points, qu'il soit permis de la prolonger ou d'imaginer qu'elle est prolongée aussi loin qu'il est nécessaire.

Les Lignes Mathématiques, que l'on considere dans la Théorie de la Géométrie, n'ayant ni largeur ni épaisseur, ne peuvent point être tracées. Pour les représenter, on fait des traits assez gros pour être aperçus, & assez déliés pour que l'erreur qu'ils peuvent causer dans une Figure ne soit pas sensible.

Lorsque les Lignes droites ne sont pas fort longues, on se sert ordinairement d'une Regle *pour les tracer. Cet instrument étant connu de tout le monde, on peut se dispenser de le décrire.*

Mais lorsque les Lignes sont trop longues, ou qu'on n'a pas de Regle assez longue pour les tracer, on se sert d'un fil ou d'un cordeau bien tendu; je dis BIEN TENDU, *parce que dans le cas où le cordeau ne seroit pas vertical, ou porté par un Plan en situation de l'empêcher de se courber, le poids de ce cordeau empêcheroit qu'il ne fût exactement en Ligne droite.*

On a remarqué qu'un fil de 24 pieds de long, pesant 161 grains $\frac{5}{6}$, & dont 33 diametres font deux pouces, étant tendu horizontalement avec dix livres de force, baisse dans son milieu d'une Ligne & demie.

Corollaire I.

2. Donc on ne peut mener qu'une seule Ligne droite entre deux Points.

Car (*N°*. 1.) une Ligne droite eſt le chemin le plus court entre deux Points ; & (*Ax. XIII.*) entre deux Points il n'y a qu'un ſeul chemin qui ſoit le plus court de tous.

Corollaire II.

3 Donc deux Points déterminent la poſition d'une Ligne droite.

Car (*N°*. 2.) on ne peut mener qu'une ſeule Ligne droite par deux Points; & par conſéquent, lorſque deux Lignes droites paſſeront par les deux mêmes Points, elles ſe confondront en une ſeule Ligne droite.

4 *Ainſi quand on voudra déterminer la direction d'une Ligne droite, il ſuffira de trouver deux Points de cette Ligne droite ; car en traçant à la Regle ou au cordeau une Ligne par ces deux Points, on aura la Ligne droite qu'on demande.*

Corollaire III.

5 Donc deux Lignes droites qui ſe coupent ne ſe rencontrent qu'en un ſeul Point.

Car ſi ces deux Lignes ſe rencontroient en deux Points, elles paſſeroient par ces deux mêmes Points, & ſe confondroient en une ſeule Ligne droite (*N°*. 3.) ; ainſi elles ne ſe couperoient point : ce qui ſeroit contre l'hypothèſe.

Corollaire IV.

6 Donc deux Lignes droites ne peuvent pas renfermer un eſpace.

Car pour que deux Lignes *ABC*, *ADC*, renferment un eſpace, il faut qu'elles partent toutes deux d'un même Point *A*, & qu'elles ſe rejoignent à un même Point *C*, ſans ſe confondre ; ce que deux Lignes droites ne peuvent pas faire, puiſqu'on n'en peut tirer qu'une du Point *A* au Point *C* (*N°*. 2.). Fig. 1 & 2.

Fig. 2. Il faut donc au moins trois Lignes droites *AB*, *BC*, *AC*, pour renfermer un espace.

Corollaire V.

Fig. 2. 7 Donc si trois Lignes droites *AB*, *BC*, *AC*, renferment un espace, deux d'entr'elles, prises comme on voudra, seront ensemble plus longues que la troisiéme. Par exemple, on aura $AB + BC > AC$.

Car la Ligne *AC* étant droite, elle est le chemin le plus court du Point *A* au Point *C* (*N°*. 1.).

N. B. On fera dans la suite un fréquent usage de ce Corollaire.

Définition.

Fig. 3. 8 Une Superficie à laquelle on peut appliquer exactement une Ligne droite en tous sens, s'appelle *Superficie plane* ou *Plan*; & si la Ligne droite ne s'y applique pas dans tous les sens, on la nomme *Superficie courbe*.

Toutes les Figures dont il sera question seront dans un même Plan, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

Pour examiner si une Superficie est plane, on approche d'elle une Regle dans tous les sens; & si la Regle s'applique exactement sur la Superficie, on conclut que c'est un Plan.

Théoréme.

Fig. 4. 9 *Si d'un Point* D *pris au dedans d'une Figure* ABC *renfermée par trois Lignes droites, on mene deux Droites* DA, DC, *aux extrémités d'un côté* AC, *ces deux Droites* DA, DC, *seront ensemble plus courtes que la somme* AB + BC *des deux autres côtés de la Figure.*

Démonstration.

Soit prolongée la droite *AD*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *E* le côté *BC*. On aura

1°. $AB + BE > AE$ (N°. 7.); & ajoûtant EC à chaque Membre, on aura $AB + BC > AE + EC$ (*Ax. VIII.*).

2°. Mais on aura aussi $DE + EC > DC$ (N°. 7.); & ajoûtant AD à chaque Membre, on aura $AE + EC > AD + DC$ (*Ax. VIII.*).

Donc (*Ax. XI.*) on aura à plus forte raison $AB + BC > AD + DC$ ou $AD + DC < AB + BC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DÉFINITION.

10 On appelle en général *Ligne courbe* toute Ligne qui n'est pas le chemin le plus court entre ses extrêmités.

Suivant cette Définition, une Ligne qui ne seroit pas droite, mais qui seroit composée de plusieurs parties droites, comme la Ligne $ABCD$, pourra Fig. 5. être appelée une Ligne courbe. Cependant il n'y a que les Lignes dont aucune partie n'est droite, qui soient des Courbes proprement dites.

COROLLAIRE.

11. Donc on peut mener une infinité de Lignes courbes entre deux Points.

Car entre deux Points il y a une infinité de chemins qui ne sont pas le plus court.

De toutes les Lignes courbes proprement dites, dont le nombre est infini, il n'y en a qu'une seule dont on fasse usage dans les Élémens de Géométrie; c'est la Circonférence du Cercle.

DÉFINITION.

12 1°. Une Ligne $ABDEA$ qui renferme un Fig. 6. Espace plan, & dont tous les Points A, B, D, E, &c sont également éloignés d'un même Point C

pris au dedans de ce Plan, se nomme *Circonférence*; chaque portion de cette Circonférence s'appelle *Arc*; & l'Espace plan renfermé par la Circonférence entiere se nomme *Cercle.*

Toute Ligne tirée du Centre à la Circonférence se nomme *Rayon.* Ainsi tous les Rayons d'un même Cercle, ou de Cercles égaux, sont égaux entr'eux.

On a demandé qu'il soit permis de décrire un Cercle de tel Centre & de tel Rayon qu'on voudra.

L'instrument dont on se sert pour décrire un Cercle ou pour tracer sa Circonférence, se nomme Compas. *Cet instrument étant connu de tout le monde, il est inutile d'en faire la description.*

Lorsque le Compas n'est pas assez grand, l'on décrit aussi un Cercle avec une perche ou un cordeau dont on assujétit une extrémité au Point qui est donné pour Centre.

13 *On emploie les Arcs de Cercles, ou plustôt le Compas ou le cordeau qui sert à les tracer, pour trouver des Points dont chacun soit également éloigné de deux Points*
Fig. 7. *donnés, tels que* F, G.

Car si l'on ouvre le Compas de maniere qu'il comprenne plus de la moitié de l'Intervalle F G, *ou qu'on prenne un Cordeau plus grand que la moitié de cet Intervalle, & que des Points donnés* F, G, *comme Centres on décrive deux Arcs* BAC, DAE, *qui se coupent dans un Point* A, *ce Point* A *sera à égale distance des deux Points donnés* F, G; *puisque si des deux Centres* F, G, *l'on tire des Droites* FA, GA, *à la Section* A *des deux Arcs, ces Droites seront des Rayons égaux par construction.*

On trouvera de la même façon tant de Points H, h, *qu'on voudra, dont chacun sera également éloigné des deux Points donnés* F, G.

CHAPITRE II.

CHAPITRE II.

Des Angles en général, & de leurs différentes especes.

14 ON appelle *Angle* l'ouverture de deux Lignes *AB*, *BC*, qui se rencontrent en un Point. Fig. 8.

Les Lignes *AB*, *BC*, qui forment l'Angle par leur ouverture, s'appellent *Côtés* de l'Angle.

Le Point *B*, où les Côtés de l'Angle se rencontrent, se nomme *Tête* ou *Sommet* ou *Pointe* de l'Angle.

On distingue trois especes d'Angles;

L'Angle rectiligne qui est formé par deux Lignes droites;

L'Angle curviligne qui est formé par deux Lignes courbes;

L'Angle mixtiligne qui est formé par une Ligne droite & par une Ligne courbe.

Mais les deux dernieres especes d'Angles pouvant être rapportées à la premiere par le moyen des Tangentes, nous ne parlerons dans ce Traité que des Angles rectilignes.

On remarquera que pour désigner un Angle il est souvent nécessaire de le nommer par trois lettres, en observant de mettre au milieu de la nomination la lettre qui en marque le Sommet. Ainsi pour nommer l'Angle formé par *AB* & par *BC*, il faut dire: l'Angle *ABC*, ou *CBA*; & l'on ne doit point dire: l'Angle *ACB*, ni *CAB*, ni *BAC*, ni *BCA*.

On peut désigner un Angle par une seule lettre *B* qui marque son Sommet, lorsque ce Sommet *B* n'appartient à aucun autre Angle. Ainsi l'Angle *ABC* étant seul à son Sommet *B*, peut être nommé l'Angle *B*. Fig. 8.

Fig. 9. Mais si plusieurs Angles *ABC*, *CBD*, *ABD*, ont leur Sommet au même Point *B*, on ne pourra nommer aucun de ces Angles par la seule lettre *B* de son Sommet. Car en disant l'Angle *B*, on ne distingueroit pas lequel des trois Angles *ABC*, *CBD*, *ABD*, on veut désigner. Ainsi pour indiquer l'Angle formé par *AB* & *BC*, il faut dire: l'Angle *ABC* ou *CBA*; pour nommer l'Angle formé par *CB* & *BD*, il faut dire: l'Angle *CBD* ou *DBC*; & pour marquer l'Angle formé par *AB* & par *BD*, il faut dire: l'Angle *ABD* ou *DBA*.

Corollaire I.

15 Puisque l'Angle consiste dans l'ouverture de ses côtés, sa grandeur ne doit pas dépendre de leur longueur. Ainsi pour agrandir ou pour diminuer un Angle, il faut nécessairement écarter ou rapprocher ses côtés l'un de l'autre, en les faisant tourner sur leur Sommet, comme on fait tourner les branches d'un Compas sur sa tête ou charniere, quand on veut l'ouvrir ou le fermer.

Fig. 10. L'Angle *FBG* est donc plus grand que l'Angle *ABC*, quoique les cotés du premier soient plus courts que ceux du second. Car les côtés de l'Angle *FBG* sont plus ouverts que ceux de l'Angle *ABC*.

Fig. 11. L'Angle *ABC* est donc égal à l'Angle *DBE*, quoique les côtés du premier soient beaucoup plus longs que ceux du second. Car ces deux Angles ont la même ouverture.

Corollaire II.

Fig. 11 & 12. 16 Donc si deux Angles *dbe*, *ABC*, sont égaux, & que l'on place le Sommet de l'un sur le Sommet de l'autre, en sorte que le côté *db* du premier tombe

en *D B* ſur le côté *A B* du ſecond, il faudra que le côté *b e* du premier Angle tombe en *B E* ſur le côté *B C* du ſecond. Car ſi le côté *b e* tomboit en dehors ou en dedans de l'Angle *A B C*, l'Angle *d b e* feroit plus grand ou plus petit que l'Angle *A B C*; ce qui feroit contre la ſuppoſition.

DÉFINITIONS.

17 1°. Lorſqu'une Droite *A B* ne penche d'aucun côté ſur une Droite *F G*, on la nomme *Perpendiculaire* à *F G*. Fig. 133

2°. Si la Droite *B D* penche de l'un ou de l'autre côté ſur la Droite *F G*, on la nomme *Oblique* à *F G*.

3°. Les deux Angles *A B F*, *A B G*, que la Perpendiculaire *A B* forme avec *F G*, s'appellent *Angles droits*.

4°. Des deux Angles inégaux *DBF*, *DBG*, que l'Oblique *DB* forme avec *F G*, le plus grand *D B F* ſe nomme *Angle obtus*, & le plus petit *D B G* ſe nomme *Angle aigu*.

5°. Les deux Angles formés par la Perpendiculaire *A B* ou par l'Oblique *D B* ſe nomment enſemble *Angles de ſuite*.

COROLLAIRE I.

18 Donc on ne peut tirer qu'une ſeule Perpendiculaire *A B* au même Point *B* d'une Droite *F G*, & dans le même Plan. Car ſi par le Point *B* l'on menoit une ſeconde Ligne *B D*, elle pencheroit plus d'un côté que de l'autre, & par conſéquent ne ſeroit pas perpendiculaire à *F G*. Fig. 133

Mais on peut mener une infinité d'Obliques à la Droite *F G* par le même Point *B*. Car il eſt évident qu'on peut tirer par ce Point une infinité de lignes qui pencheront différemment ſur la Droite *F G*,

COROLLAIRE II.

Fig. 13. 19 Donc la Perpendiculaire *AB* fait avec *FG* deux Angles égaux *ABF*, *ABG*; & par conſéquent les Angles droits ſont égaux: au contraire l'Oblique *DB* fait toûjours deux Angles inégaux *DBF*, *DBG*.

Car ſi la Perpendiculaire *AB* faiſoit des Angles inégaux ou des ouvertures inégales avec *FG*, elle pencheroit plus du côté de la petite ouverture que du côté de la plus grande; ce qui ſeroit contre ſa définition: & au contraire, ſi l'Oblique *DB* faiſoit des Angles égaux avec *FG*, elle ne pencheroit pas plus d'un côté que de l'autre; ce qui ſeroit auſſi contre la définition de la Ligne oblique.

COROLLAIRE III.

20 Donc l'Angle obtus *DBF* eſt plus grand que
Fig. 13. le droit *ABF* ou *ABG*; & l'Angle aigu *DBG* eſt plus petit que le droit *ABG* ou *ABF*.

THÉORÊME.

21 *Deux Angles de ſuite valent toûjours enſemble deux Angles droits.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 13. 1°. Lorſqu'une Droite *AB* eſt perpendiculaire à *FG*, chacun des deux Angles *ABF*, *ABG*, qu'elle forme, eſt droit (*N*°. 17.). Ainſi ces deux Angles valent enſemble deux droits.

2°. Si la Droite *BD*, qui fait deux Angles de ſuite, eſt oblique à *FG*, ſoit tirée la Perpendiculaire *AB*. On verra que l'Angle obtus *DBF* ſurpaſſera le droit *ABF* de la même quantité angulaire *ABD*, dont l'aigu *DBG* eſt ſurpaſſé par le droit *ABG*. Ainſi l'obtus *DBF* & l'aigu *DBG*

de suite valent ensemble autant que deux Angles droits.

Donc en général deux Angles de suite, formés par une Perpendiculaire *AB* ou par une Oblique *DB* qui rencontre une Droite *FG*, valent toûjours ensemble autant que deux Angles droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

22 Donc deux Angles de suite valent ensemble autant que deux autres Angles de suite; car ils ont même valeur, savoir, deux droits.

COROLLAIRE II.

23 Donc si deux Angles *DBF*, *DBG*, qui ont un côté commun *DB*, & leur Sommet au même Point *B*, valent ensemble moins ou plus que deux Angles droits, la Ligne *FBG* ne sera pas droite; mais elle fera un Angle au Point *B*. Car si la Ligne *FBG* étoit droite, les deux Angles *DBF*, *DBG*, vaudroient ensemble deux Angles droits (*N*°. 21.). Fig. 14 & 15.

COROLLAIRE III.

24 Donc si la Ligne *FBG* est brisée en *B*, c'est-à-dire, si elle fait un Angle en *B*, les deux Angles *DBF*, *DBG*, vaudront ensemble moins ou plus que deux Angles droits. Car si l'on tire *BC* en Ligne droite avec *FB*, les deux Angles *DBF*, *DBC*, vaudront ensemble deux droits (*N*°. 21.). Ainsi les Angles *DBF*, *DBG*, qui sont différents de *DBF*, *DBC*, doivent valoir ensemble moins ou plus que deux Angles droits. Fig. 14 & 15.

COROLLAIRE IV.

25 Donc si deux Angles *DBF*, *DBG*, valent ensemble autant que deux droits, la Ligne *FG* sera Fig. 16.

droite. Car si elle étoit rompue en *B*, les deux Angles *DBF*, *DBG*, vaudroient ensemble moins ou plus que deux droits (*N°*. 24.).

COROLLAIRE V.

Fig. 17. 26 Si dans un même Plan l'on tire plusieurs Droites *AB*, *DB*, *CB*, &c. au même Point *B* de la Droite *FG*, & du même côté de cette Ligne, tous les Angles *FBA*, *ABD*, *DBC*, *CBG*, &c. vaudront ensemble deux Angles droits. Car tous ces Angles seront toutes les parties de deux Angles de suite *DBF*, *DBG*, qui sont droits ou qui valent ensemble autant que deux droits (*N°*. 21.).

Fig. 18. Par la même raison, tous les Angles *FBE*, *EBH*, *HBG*, &c. qui auront leurs Sommets au même Point *B*, & qui seront de l'autre côté de la Droite *FG*, vaudront ensemble deux Angles droits.

Fig. 19. Ainsi tous les Angles *FBA*, *ABD*, *DBC*, *CBG*, *GBH*, *HBE*, *EBF*, qui seront dans un même Plan autour d'un même Point *B*, vaudront ensemble quatre Angles droits.

DÉFINITIONS.

27 1°. Lorsque deux Angles valent ensemble deux Droits, l'un s'appelle le *Supplément* de l'autre.

Fig. 16. Ainsi quand on a deux Angles de suite *DBF*, *DBG*, lesquels valent toûjours ensemble deux droits (*N°*. 22.), l'obtus *DBF* est le Supplément de l'aigu *DBG*; & l'aigu *DBG* est le Supplément de l'obtus *DBF*.

Fig. 13. 2°. Lorsque deux Angles *ABD*, *DBG*, valent ensemble un droit, l'un s'appelle le *Complément* de l'autre. Ainsi *ABD* est le Complément de *DBG*.

Fig. 20 & 21. 3°. Lorsque deux Droites *AB*, *DE*, se croisent en un Point *C*, les deux Angles *ACD*, *BCE*, ou

les deux ACE, BCD, s'appellent *Angles opposés au Sommet.*

COROLLAIRE I.

28 Donc les Angles égaux ont des Suppléments égaux ; & deux Angles sont égaux, quand ils sont Suppléments d'un même Angle ou d'Angles égaux.

COROLLAIRE II.

29 De même les Angles égaux ont des Compléments égaux; & deux Angles sont égaux, quand ils sont Compléments d'un même Angle ou d'Angles égaux.

THÉORÈME.

30 *Les Angles opposés par le Sommet sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

1°. ACD est Supplément de ACE (*N°.* 27.). Fig. 20 & 21.
Mais BCE est aussi Supplément de ACE. Donc les Angles ACD, BCE, opposés au Sommet, sont égaux (*N°.* 28.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. ACE est Supplément de ACD, & BCD est aussi Supplément de ACD (*N°.* 27.). Donc les Angles ACE, BCD, opposés au Sommet, sont égaux (*N°.* 28.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

31 Donc si la Droite AB est perpendiculaire à la Fig. 21.
Droite ED, la Droite ED sera réciproquement perpendiculaire à la Droite AB.

Car si la Droite AB est perpendiculaire à la Droite ED, l'on aura (*N°.* 19.) $ACD=ACE$. Mais (*N°.* 30.) $ACE=DCB$. Ainsi l'on aura $ACD=DCB$; c'est-à-dire, que la Droite DE fera avec AB des ouvertures égales de part & d'autre, & ne pen-

chera par conséquent d'aucun côté sur la Droite *AB* : d'où il suit (*N°. 17.*) qu'elle sera perpendiculaire à la Droite *AB*.

THÉORÊME.

Fig. 20 & 21. 32 *Si quatre Angles rectilignes* ACD, ACE, BCD, BCE, *décrits dans un même Plan, avec un Sommet commun* C, *sont tels que les opposés au Sommet soient égaux deux à deux; c'est-à-dire, si* ACD = BCE, *& si* ACE = BCD, *je dis que les deux Lignes* AB, DE, *seront deux Lignes droites.*

DÉMONSTRATION.

Puisque (*hypothèse*) *ACD=BCE*, & *ACE=BCD*, on aura

1°. $ACD + ACE = BCE + BCD$. Mais ces quatre Angles valent ensemble quatre Angles droits (*N°. 26.*). Donc les deux $ACD + ACE$ valent ensemble deux droits; & par conséquent *DE* est une Ligne droite (*N°. 25.*). *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. $ACD + BCD = BCE + ACE$. Mais ces quatre Angles valent ensemble quatre Angles droits (*N°. 26.*). Donc les deux $ACD + BCD$ valent ensemble deux droits; & par conséquent *AB* est aussi une Ligne droite (*N°. 25.*). *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*



CHAPITRE III.

Des Perpendiculaires & des Obliques.

NOUS avons démontré dans le Chapitre précédent, sous le titre des *Angles*, les propriétés principales du concours des Lignes droites en général. Nous allons examiner dans celui-ci les propriétés qui dépendent du concours perpendiculaire & oblique en particulier; & nous supposerons toûjours que toutes les Lignes & les Points dont nous parlerons sont dans un même Plan.

THÉORÉME.

33 *Si la Droite* AB *est perpendiculaire sur le milieu de la Droite* FG, *tout Point tel que* C, *qui sera dans la Perpendiculaire* AB, *sera également éloigné des extrémités de la Droite* FG. Fig. 22.

DÉMONSTRATION.

Du Point quelconque *C* de la Perpendiculaire *AB*, soient tirées des Droites *CF*, *CG*, aux extrémités de la Droite *FG*. Si l'on plie la Figure de maniere que le pli se trouve dans la Perpendiculaire *AB*, comme les Angles *ABF*, *ABG*, sont égaux (*N*o. 19.), le côté *BG* se couchera sur le côté *BF* (*N*o. 16.); & puisque (*hyp.*) *BG*=*BF*, le Point *G* tombera en *F*: en sorte que les Droites *CF*, *CG*, qui sont les Distances du Point *C* aux extrémités *F*, *G*, conviendront parfaitement, & seront par conséquent égales (*Ax. XII.*) Donc le Point *C* est également éloigné des deux extrémités de la Droite *FG*.

Ce qu'on vient de démontrer du Point *C* se démontrera de la même façon de tout autre Point de la Perpendiculaire *AB*.

Ainsi lorsqu'une Droite *AB* sera perpendiculaire sur le milieu d'une autre Droite *FG*, chaque Point de cette Perpendiculaire sera également éloigné des deux extrémités de la Droite *FG*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 22. 34 Les deux Droites *CF*, *CG*, qui partent du même Point quelconque *C* de la Droite *AB* perpendiculaire au milieu de la Droite *FG*, étant égales (*N°*. 33.), nous pouvons en conclurre que deux Obliques sont égales, lorsqu'elles partent d'un même Point *C* d'une Perpendiculaire *AB*, & qu'elles s'éloignent également de cette Perpendiculaire.

THÉORÊME.

Fig. 23. 35 *Si la Droite* AB *est perpendiculaire sur le milieu de la Droite* FG, *tout Point tel que* D, *qui ne sera pas dans cette Perpendiculaire ou dans son prolongement, ne sera pas également éloigné des extrémités de la Droite* FG;

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les Droites *DF*, *DG*, aux extrémités de *FG*; & par le Point *C*, où la Perpendiculaire est coupée par l'une de ces Droites, soit menée la Droite *CG*.

Le Point *C* étant dans la Perpendiculaire *AB*, on aura $CF = CG$ (*N°*. 33.). Ajoûtant *DC* à chaque membre de cette Égalité, on aura $DF = DC + CG$. Mais $DC + CG > DG$ (*N°*. 7.). Donc aussi $DF > DG$; c'est-à-dire, que le Point *D*, qui n'est pas dans la Perpendiculaire *AB* qui coupe *FG* en

deux parties égales, eſt plus éloigné du Point F que du Point G. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

36 Donc tout Point qui ſera également éloigné des deux extrémités de la Droite *FG*, ſera dans la Perpendiculaire qui partage cette Ligne en deux également. Car ſi ce Point n'étoit pas dans cette Perpendiculaire, il ne ſeroit pas également éloigné des deux Points *F, G.* (*N°.* 35.). Ainſi la Perpendiculaire *AB*; qui partage *FG* en deux Parties égales, paſſe par tous les Points également éloignés des deux extrémités *F, G*, de cette Ligne. Fig. 23.

COROLLAIRE II.

37 Donc ſi l'on a deux Points *A* & *C*, ou *A* & *B*, dont chacun ſoit également éloigné des bouts de la Droite *FG*, la Droite *AB* qui paſſera par ces deux Points, ſera perpendiculaire ſur le milieu de *FG*. Car ces deux Points appartiennent (*N°.* 36.) à la Perpendiculaire qui partage *FG* en deux également; & la Perpendiculaire étant une Ligne droite, il ne faut que deux Points pour la déterminer (*N°.* 3.). Fig. 23.

PROBLÉME.

38 *Mener une Perpendiculaire* AB *ſur le milieu d'une Droite* FG.

SOLUTION.

Des deux Extrémités *F, G*, de la Droite *FG*, comme Centres, on décrira (*N°.* 13.) avec un même Rayon, c'eſt-à-dire, avec la même ouverture du Compas, deux Arcs qui ſe couperont en *A* & *D*; & par ces deux Points *A* & *D*, qui ſeront également éloignés des deux bouts de la Droite *FG*, on me- Fig. 24.

nera la Droite *AD*, qui sera perpendiculaire sur le milieu de la Droite *FG* (*N*°. 37.).

Si, faute de place au-dessus ou au-dessous de la Droite *FG*, les deux Arcs décrits du même Rayon ne peuvent pas se rencontrer en deux Points *A* & *D*, on cherchera (*N*°. 13.) un second Point *C* ou *K* également éloigné des deux Points *F*, *G* : & la Droite qui passera par ce Point *C* ou *K*, & par le Point *A*, sera perpendiculaire sur le milieu de *FG* (*N*°. 37.) ; puisqu'elle aura deux Points dont chacun sera également éloigné des extrémités de la Droite *FG*.

COROLLAIRE.

39 Ce Problême peut aussi servir à couper une Ligne droite *FG* en deux parties égales.

PROBLÊME.

Fig. 25, 26, 27, 28, & 29. 40 *D'un Point donné* B, *tirer une Ligne qui soit perpendiculaire à une Droite* FD.

SOLUTION.

Fig. 25 & 26. Du Point donné *B* comme Centre, on décrira un Arc *FEG* qui coupera la Droite *FD* en deux Points *F*, *G*, dont le Point donné *B* sera également éloigné (*N*°. 12.). Ensuite on cherchera (*N*°. 13.) un second Point *A*, qui soit encore également éloigné des deux Points *F*, *G* : & la Droite qu'on tirera par les deux Points *A*, *B*, sera perpendiculaire sur le milieu de *FG* (*N*°. 37.) & par conséquent sur *FD*.

Fig. 27 & 28. Si la Perpendiculaire demandée doit tomber à l'extrémité de la Droite *FD*, l'Arc *FEG*, décrit du Point *B* comme Centre, ne pourra rencontrer la

Droite *FD* qu'en un ſeul Point *F*. Dans ce cas, on prolongera la Droite *FD* juſqu'à ce qu'elle rencontre l'Arc *FEG* dans un ſecond Point *G* ; puis on cherchera (*N°*. 13.) un Point *A* également éloigné des deux Points *F*, *G* : & l'on ménera par les Points *B*, *A*, une Droite indéfinie *BA*, qui ſera la Perpendiculaire demandée.

Si l'Arc décrit du Point donné *B* comme Centre ne peut pas rencontrer la Droite *FD* en deux Points, on pourra faire uſage de la pratique ſuivante.

D'un Point quelconque *G* de la Droite *FD*, comme Centre, on décrira par le Point donné *B* un Arc *BIA*. Puis d'un autre Point *E* de la même Ligne *FD*, comme Centre, on décrira par le même Point *B* un ſecond Arc *BKA*, qui rencontrera le premier Arc aux deux Points *B*, *A*, deſquels chacun des deux Centres *G*, *E*, ſera également éloigné. Ainſi en menant *BA*, la Droite *FD* lui ſera perpendiculaire. (*N°*. 37.) ; & par conſéquent (*N°*. 31.) *BA* ſera perpendiculaire ſur *FD*. Fig. 29.

Cette derniere Solution ſuppoſe que le Point donné B, *par lequel il faut mener une Perpendiculaire, n'eſt pas dans la Droite* FD *ſur laquelle la Perpendiculaire doit être tirée. Nous verrons pluſieurs autres Pratiques pour mener des Perpendiculaires, à meſure que nous ſerons en état de les démontrer.*

THÉORÊME.

41 1°. *Une Droite* AB, *mené d'un point quelconque* A, *perpendiculairement à une Droite* FG, *eſt la plus courte de toutes les Lignes* AB, AD, AF, &c *qu'on peut mener du même Point* A *à la même Droite* FG. Fig. 30.

2°. *De deux Obliques* AD, AF, *différemment éloignées de la Perpendiculaire* AB, *celle* AF *qui s'en écarte le plus eſt la plus longue.*

Et réciproquement,

1°. *Lorsqu'une Droite* AB *est la plus courte de toutes les Lignes qu'on peut mener du Point* A *à une Droite* FG, *elle est perpendiculaire à cette Droite* FG.

2°. *Lorsque deux Obliques* AD, AF, *qui partent d'un même Point* A *sont inégales, celle qui est la plus longue s'écarte le plus de la Perpendiculaire* AB.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongée la Perpendiculaire AB en H, de maniere que l'on ait $BH = AB$; & soient tirées les Droites DH, FH.

Puisque (*hyp.*) AB est perpendiculaire sur FG, FG sera réciproquement perpendiculaire sur AB (*N*°. 31.); & comme on a fait $BH = AB$, FG se trouvera perpendiculaire sur le milieu de AH. Ainsi chaque point de la Droite FG sera également éloigné des deux extrémités de la Droite AH (*N*°. 33.).

On aura donc

$$\left.\begin{array}{l} AB = BH \text{ (construction)} \\ AD = DH \text{ (No. 33.)} \\ AF = FH \text{ (No. 33.)} \end{array}\right\} \text{ \& par conséquent } \left\{\begin{array}{l} AB = \frac{AH}{2} \\ AD = \frac{AD+DH}{2} \\ AF = \frac{AF+FH}{2} \end{array}\right.$$

Mais $AH < AD + DH$ (*N*°. 7.) & $AD + DH < AF + FH$ (*N*°. 9.).

Donc en prenant les moitiés de ces Quantités inégales, on aura

$$\frac{AH}{2} < \frac{AD+DH}{2}, \ \& \ \frac{AD+DH}{2} < \frac{AF+FH}{2}.$$

ou $AB < AD$, & $AD < AF$;

c'est-à-dire, que

1°. La Droite AB menée du Point A perpendiculairement sur FG, est plus courte que toute autre Ligne, telle que AD, menée du même Point A à la même Droite FG. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. De deux Obliques *AD*, *AF*, différemment éloignées de la Perpendiculaire *AB*, celle *AD* qui s'en éloigne le moins est la plus courte, ou celle *AF* qui s'en éloigne le plus est la plus longue. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Et réciproquement, il suit de ces deux vérités que

1°. Lorsqu'une Droite *AB* est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du Point *A* sur *FG*, elle est perpendiculaire à *FG*. Car nous venons de démontrer que si elle n'étoit pas perpendiculaire, elle ne seroit pas la plus courte qu'on peut mener du Point *A* sur *FG*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. La plus longue de deux Obliques qui vont d'un même Point *A* à une même Droite *FG*, est toûjours la plus écartée de la Perpendiculaire. Car nous venons de voir que si elle n'étoit pas la plus écartée, elle ne seroit pas la plus longue. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

42 Donc on ne peut mener qu'une seule Perpendiculaire *AB* d'un même Point *A* à une même Droite *FG*. Car nous venons de voir que la Perpendiculaire *AB* est la Ligne la plus courte qu'on puisse mener du Point *A* à la Droite *FG*; & l'on ne peut mener du Point *A* à la Droite *FG*, qu'une Ligne qui soit la plus courte. Fig. 30.

Il suit de là que deux Perpendiculaires *AB*, *CD*, à une même Droite *FG*, ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge; parce que si elles se rencontroient en quelque Point, il y auroit deux Perpendiculaires de ce Point à la même Droite *FG*: ce qui est impossible. Fig. 31.

COROLLAIRE II.

43 Donc si deux Obliques égales *AF*, *AG*, vont Fig. 30.

d'un même Point *A* à une même Droite *FG*, elles seront également éloignées de la Perpendiculaire *AB*; parce que nous venons de voir (*N*°. 41.) que si elles n'étoient pas également éloignées de la Perpendiculaire *AB*, elles ne seroient pas égales.

Et réciproquement, si deux Obliques *AF*, *AG*, qui partent d'un même Point *A*, s'éloignent également de la Perpendiculaire *AB*, elles seront égales. Car nous avons vû (*N*°. 41.) que si l'une étoit plus longue que l'autre, elle seroit plus éloignée que l'autre de la Perpendiculaire *AB*. *Cette conséquence a déjà été démontrée* (*N*°. 34.).

Il suit de la premiere partie de ce Corollaire, que si deux Droites égales *AF*, *AG*, vont d'un même Point *A* à une Droite *FG*, elles seront toutes deux obliques à la Droite *FG*; & que la Perpendiculaire *AB* tombera entre elles sur le milieu de *FG*: & par conséquent, lorsqu'un Point *A* sera également éloigné des deux extrémités d'une Droite *FG*, la Perpendiculaire qu'on menera par ce Point *A* à la Droite *FG*, coupera *FG* en deux parties égales.

COROLLAIRE III.

Fig. 30. 44 Donc il est impossible de mener trois Lignes droites égales d'un même Point *A* à une même Ligne droite *FG*. Car il en faudroit tirer deux égales, telles que *AD*, *AF*, d'un même côté de la Perpendiculaire; ce qui est impossible, puisque ces deux Lignes seroient différemment éloignées de la Perpendiculaire, & seroient par conséquent inégales, (*N*°. 41.).

Trois Points d'une même Ligne droite *FG*, ne peuvent donc pas être également éloignées d'un même Point *A*.

Et comme tous les Points d'une même Circonfé-

rence

tence doivent être également éloignés d'un même Point qui leur sert de Centre (*N°*. 12.), il est clair que trois Points d'une même Ligne droite ne peuvent pas appartenir à une même Circonférence. Ainsi une Ligne droite & une Circonférence ne peuvent pas se rencontrer en trois Points.

DÉFINITION.

45 Le chemin le plus court d'un Point à une Ligne s'appelle la *Distance* de ce Point à cette Ligne.

Mais la Perpendiculaire *AB* est le chemin le plus court d'un Point *A* à une Ligne Droite *FG*. Donc la Perpendiculaire *AB*, menée d'un Point *A* à une Ligne droite *FG*, est la Distance de ce Point à cette Ligne. Fig. 30.

CHAPITRE IV.

Des Lignes droites Paralléles.

NOUS avons examiné dans les deux Chapitres précédens les principales propriétés du concours des Lignes droites en général. Nous allons voir dans celui-ci les propriétés qu'elles ont lorsqu'elles ne peuvent point se rencontrer.

Les Paralléles peuvent être définies de plusieurs manieres; & toutes les Définitions qu'on en donnera seront bonnes, pourvû qu'on les fasse connoître par une propriété dont on puisse déduire toutes les autres.

On peut définir les Paralléles par la propriété qu'elles ont d'être partout également distantes, quelque longues qu'elles puissent être. On peut aussi les définir par quelqu'une de leurs constructions. Nous

prendrons ce dernier parti, & nous choisirons pour les définir leur construction la plus facile & la plus expéditive, qui est celle dont se servent ordinairement les Dessinateurs.

CONSTRUCTION ET DÉFINITION DES PARALLÉLES.

Fig. 32. 46 Pour décrire aisément & promptement des Lignes paralléles, on prend une Equerre *BAC*, dont on fait glisser un côté *AC* le long d'une Regle immobile *PQ*, en tenant toûjours l'Equerre appliquée sur le même Plan contre la Regle; & dans chaque position *BAC*, *bac*, de l'Equerre, on tire des Lignes droites *AB*, *ab*, le long du même côté de cette Equerre. Les deux Lignes droites *AB*, *ab*, ainsi tirées, se nomment *Paralléles*.

Il n'est pas nécessaire que le côté *AB*, le long duquel on tire les Paralléles *AB*, *ab*, dans les différentes positions de l'Equerre, soit perpendiculaire sur le côté *AC* qui glisse contre la Regle immobile; en sorte que si l'Equerre avoit un côté rectiligne *BC* oblique au côté *AC*, les Lignes *BC*, *bc*, qu'on tireroit le long du côté *BC* dans les différentes positions de l'Equerre, seroient aussi nommées *Paralléles*.

COROLLAIRE I.

47 Donc les Paralléles *AB*, *ab*, ou *CB*, *cb*, sont dans un même Plan, & sont également inclinées sur la Regle ou Directrice *PQ*. Car l'inclinaison des Paralléles *AB*, *ab*, sur la Directrice *PQ*, est égale à celle que le côté *AB* de l'Equerre *BAC* a sur le côté *AC* qui glisse le long de la Directrice. Il en est de même des deux autres Paralléles *BC*, *bc*.

On auroit pû, sans entrer dans le détail de la construction des Paralléles, les définir ainsi.

Deux Droites sont paralléles, lorsque dans un même Plan elles sont également inclinées d'un même côté sur une même Droite.

On reconnoîtra donc que deux Droites *AB*, *CD*, sont paralléles, lorsqu'étant coupées par une Droite *FG* qui peut leur servir de Directrice, les deux Angles *AEI*, *CIG*, qui mesurent leur inclinaison du même côté sur la Directrice *FG*, seront égaux. Fig. 33. & 34.

Corollaire II.

48 Lorsque deux Droites *AB*, *CD*, sont perpendiculaires à une même Droite *FG*, les Angles *AEI*, *CIG*, qu'elles forment d'un même côté avec la Droite *FG*, sont droits, & par conséquen égaux. Ainsi (*N*°. 47.) ces Perpendiculaires *AB*, *CD*, à la même Droite *FG*, sont paralléles. Fig. 34.

Corollaire III.

49 Si l'une *AB* des deux Paralléles *AB*, *CD*, est perpendiculaire à la Directrice *FG*, l'autre Paralléle *CD* sera aussi perpendiculaire à *FG*. Car les Lignes *AB*, *CD*, étant paralléles, les Angles *AEI*, *CIG*, qu'elles forment d'un même côté avec la Directrice, sont égaux (*N*°. 47.). Mais *AB* étant perpendiculaire sur *FG*, les Angles *AEI*, *AEF*, sont droits. Donc les Angles *CIG*, *CIF*, sont droits aussi, & par conséquent égaux. Ainsi la Droite *CD* est perpendiculaire sur *FG*, aussi bien que sa Paralléle *AB*. Fig. 34.

Donc deux Paralléles *AB*, *CD*, ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge. Car si l'on tire une Droite *FG*, à laquelle l'une *AB* des deux Paralléles soit perpendiculaire, l'autre Paralléle *CD* sera aussi perpendiculaire à la même Droite *FG*. Ainsi les deux Paralléles *AB*, *CD*, qui sont dans un même Plan, seront perpendiculaires à la

même Droite *FG*, & par conséquent ne pourront pas se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge. (*N*°. 42.).

THÉORÊME.

Fig. 33. & 34. 50 *Lorsque deux Paralléles* AB, CD, *sont coupées par une même Droite* FG, *elles ont les cinq propriétés suivantes.*

1°. *Les Angles* AEI, CIG, *qu'on appelle* INTERNES EXTERNES D'UN MÊME CÔTÉ, *sont égaux.*

2°. *Les Angles* AEI, EID, *qu'on appelle* ALTERNES INTERNES, *sont égaux.*

3°. *Les Angles* FEB, CIG, *qui sont* ALTERNES EXTERNES, *sont égaux.*

4°. *Les Angles* AEI, CIE, *qu'on nomme* INTERNES D'UN MÊME CÔTÉ, *valent ensemble deux Angles droits.*

5°. *Les Angles* AEF, CIG, *qu'on nomme* EXTERNES D'UN MÊME CÔTÉ, *valent ensemble deux Angles droits.*

DÉMONSTRATION.

1°. Les Droites *AB*, *CD*, étant paralléles, on aura l'Angle $AEI=CIG$ (*N*°. 47.) : c'est une suite naturelle de leur construction.

2°. Puisque les Lignes *AB*, *CD*, sont paralléles, on a $AEI=CIG$. Mais $CIG=EID$ (*N*°. 30.). Donc $AEI=EID$.

3°. $FEB=AEI$ (*N*°. 30.). Mais $AEI=CIG$ (*N*°. 47.). Donc $FEB=CIG$.

4°. *CIG* & *CIE* valent ensemble deux Angles droits (*N*°. 21.). Mais $AEI=CIG$ (*N*°. 47.). Donc en prenant *AEI* à la place de *CIG*, on trouvera que *AEI* & *CIE* valent ensemble deux Angles droits.

5°. *AEF* & *AEI* valent ensemble deux Angles droits (*N*°. 21.). Mais $AEI=CIG$ (*N*°. 47.). Donc *AEF* & *CIG* valent ensemble deux Angles droits.

THÉORÉME.

51 *Deux Droites* AB, CD, *tracées ſur un même Plan ſeront paralléles, ſi lorſqu'on les coupe par une même Droite* FG, *elles ont une des cinq conditions ſuivantes dans les Angles qu'elles forment.* Fig. 33. & 34.

1°. *Si l'Angle* AEI = *l'Angle* CIG.
2°. *Si l'Angle* AEI = *l'Angle* EID.
3°. *Si l'Angle* FEB = *l'Angle* CIG.
4°. *Si* AEI & CIE *valent enſemble deux Droits.*
5°. *Si* AEF & CIG *valent enſemble deux Droits.*

DÉMONSTRATION.

1°. Si AEI = CIG, les deux Droites *AB*, *CD*, ſeront paralléles (*N*°. 47.).

2°. Par la ſeconde Hypothèſe *AEI* = *EID*. Mais *EID* = *CIG* (*N*°. 30.). Donc *AEI* = *CIG*. Ainſi (*N*°. 47.) les Droites *AB*, *CD*, ſont paralléles.

3°. Par la troiſiéme Hypothèſe *FEB* = *CIG*. Mais *FEB* = *AEI* (*N*°. 30.). Donc *AEI* = *CIG*. Ainſi (*N*°. 47.) les Droites *AB*, *CD*, ſont paralléles.

4°. Par la quatriéme Hypothèſe *AEI* + *CIE* = *deux Droits*. Ainſi *AEI* eſt Supplément de *CIE* (*N*°. 27.). Mais (*N*°. 27.) *CIG* eſt auſſi Supplément de *CIE*. Donc *AEI* = *CIG* (*N*°. 28.). Ainſi les Droites *AB*, *CD*, ſont paralléles (*N*°. 47.).

5°. Par la cinquiéme Hypothèſe *AEF* & *CIG* valent enſemble deux Droits. Ainſi *CIG* eſt Supplément de *AEF* (*N*°. 27.). Mais *AEI* eſt auſſi Supplément de *AEF* (*N*°. 27.). Donc *AEI* = *CIG* (*N*°. 28.). Ainſi les deux Lignes *AB*, *CD*, ſont paralléles (*N*°. 47.).

CHAPITRE V.

Des Lignes circulaires, & de leur rencontre entr'elles & avec les Lignes droites.

DÉFINITIONS.

Fig. 35. 52 NOUS avons déjà dit (*No.* 12.) qu'un Plan renfermé par une Ligne *ABDEA*, dont tous les Points sont également éloignés d'un même Point *C* de ce Plan, s'appelle *Cercle*; que le Point *C* s'appelle *Centre*; que la Ligne *ABDEA* s'appelle *Circonférence*; que chaque portion de la Circonférence s'appelle *Arc*; que toute Ligne droite telle que *CA* ou *CB*, tirée du Centre à la Circonférence, s'appelle *Rayon*; & que tous les Rayons d'un même Cercle sont égaux.

A ces Définitions nous ajoûterons les suivantes.

Toute Droite, comme *BD*, dont les deux bouts sont à la Circonférence, se nomme *Corde*.

Une Corde *AD*, qui passe par le Centre, s'appelle *Diamétre*. Ainsi chaque Diamétre vaut deux Rayons; & par conséquent tous les Diamétres d'un même Cercle sont égaux.

Une Droite *EF*, qui touche le Cercle, c'est-à-dire, qui est appliquée contre la Circonférence, s'appelle *Tangente*.

L'Espace renfermé entre un Arc *BGD* & sa Corde *BD*, s'appelle *Segment*.

L'Espace renfermé entre un Arc *AB* & deux Rayons *CA*, *CB*, se nomme *Secteur*.

Toute Droite *BH*, menée d'un Point *B* de la Circonférence perpendiculairement sur un Diamétre *AD*, se nomme *Ordonnée* du Cercle par rapport à

ce Diamétre *AD*; & les Parties *AH*. *HD*. du Diamétre, s'appellent les *Abſciſſes* de l'Ordonnée *BH*.

Toute Droite qui coupe le Cercle, ſe nomme en général *Sécante*.

COROLLAIRE I.

53 Donc les Circonférences qui ont le même Centre *C*, ne peuvent pas ſe rencontrer ſans ſe confondre en une même Circonférence. Car ou leurs Rayons ſont égaux, ou ils ſont inégaux. Fig. 36.

1°. Si leurs Rayons ſont égaux, tous les Points des deux Circonférences ſeront également éloignés de leur Centre commun *C*; & ces deux Circonférences ſe confondront en une ſeule.

2°. Si leurs Rayons ſont inégaux, la Circonférence qui aura le plus petit Rayon *CA*, tombera toute entiere au dedans de celle qui aura le plus grand Rayon *CB*; & par conſéquent ces deux Circonférences ne ſe rencontreront pas.

COROLLAIRE II.

54 Donc deux Circonférences qui ſe rencontrent; n'ont pas le même Centre. Car ſi elles avoient même Centre, elles ne ſe rencontreroient pas (*N*°. 53.)

COROLLAIRE III.

55 Donc les Cercles qui ont des Rayons égaux ſont égaux. Car ſi l'on met le Centre de l'un ſur le Centre de l'autre, les deux Cercles ſe confondront (*N*°. 53.).

Et réciproquement les Cercles qui ſont égaux ont des Rayons égaux.

PROBLÉME.

Fig. 37. 56 *Faire passer la Circonférence d'un Cercle par trois Points donnés* A, B, D, *qui ne sont pas en Ligne droite.*

Solution.

Ayant joint les trois Points donnés par deux Droites *AB*, *BD*, on élévera (*N*°. 38.) sur leurs milieux des Perpendiculaires *MN*, *OP*; & le Point *C*, où ces Perpendiculaires se rencontreront, sera le Centre du Cercle dont la Circonférence passera par les trois Points donnés *A*, *B*, *D*. Ainsi en ouvrant le Compas de la grandeur de *AC*, l'on décrira du Point *C*, comme Centre, avec cette ouverture, une Circonférence qui passera par les trois Points donnés *A*, *B*, *D*.

Car 1°. *MN* étant Perpendiculaire sur le milieu de *AB*, le Point *C* de cette Perpendiculaire sera également éloigné de *A* & de *B* (*N*°. 33.). 2°. *OP* étant Perpendiculaire sur le milieu de *BD*, le Point *C* de cette Perpendiculaire sera également éloigné du Point *B* & du Point *D* (*N*°. 33.). Donc le Point *C*, sera également éloigné des trois Points *A*, *B*, *D*, & sera par conséquent le Centre de la Circonférence qui passera par ces trois Points (*N*°. 12 & 52.).

THÉORÉME.

Fig. 38, 39 & 40. 57 *De toutes les Droites* AB, AD, AE, *qu'on peut mener à la Circonférence d'un Cercle, d'un Point* A *qui n'en est pas le Centre, soit que ce Point* A *se trouve sur la Circonférence, soit qu'il se trouve au dedans ou au dehors du Cercle.*

1°. *La Droite* AB, *qui passe par le Centre* C, *est la plus longue.*

2°. *De deux Droites* AD, AE, *qui ne passent pas par le Centre, celle* AD, *dont l'Extrémité* D *est la plus proche du bout* B *de celle qui passe par le Centre, est la plus longue.*

Et réciproquement

1°. *Lorsqu'une Droite* AB, *menée d'un Point* A *qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, est la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du même Point* A *à la Circonférence, elle passe toûjours par le Centre.*

2°. *Lorsque deux Droites inégales* AD, AE, *ne passeront ni l'une ni l'autre par le Centre* C *du Cercle, celle* AD *qui sera la plus longue aura son extrémité* D *la plus proche du bout* B *de celle qui passe par le Centre.*

DÉMONSTRATION.

Soient tirés les Rayons CD, CE, aux extrémités des Droites AD, AE, qui ne passent pas par le Centre.

On aura 1°. $CB=CD$; & ajoûtant AC, l'on aura $AB=AC+CD$. Mais (*N°.* 7.) $AC+CD>AD$. Donc aussi $AB>AD$. On démontrera de la même maniere que $AB>AE$; c'est-à-dire, que la Droite AB, qui passe par le Centre, est plus longue que toute autre Ligne AD ou AE menée du même Point A à la Circonférence. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

On aura 2°. $CD=CE$. Mais $CO+OD>CD$ (*N°.* 7.). Donc aussi $CO+OD>CE$. Otant OC de chaque membre, il restera $OD>OE$. Ajoûtant AO à chacun, l'on aura $AO+OD$ ou $AD>AO+OE$. Mais $AO+OE>AE$ (*N°.* 7.).

Donc à plus forte raison (*Ax. XI.*) $AD>AE$: c'est-à-dire, que de deux Droites AD, AE, qui ne passent point par le Centre, celle AD, dont l'extrémité est la plus proche du bout B de celle qui

passe par le Centre, est la plus longue. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Et réciproquement

1°. Puisque nous venons de voir qu'une Droite qui ne passe point par le Centre, n'est pas la plus longue de toutes les Lignes qu'on peut mener du même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, il est évident qu'une Droite *AB* passera par le Centre *C* du Cercle, lorsqu'elle sera la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du Point *A* à la Circonférence. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. La plus longue de deux Droites *AD*, *AE*, menées du Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, doit avoir son extrémité la plus proche du bout *B* de celle qui passe par le Centre; autrement celle dont l'extrémité est la plus proche du bout *B* de la Droite qui passe par le Centre, ne seroit pas la plus longue: ce qui seroit contraire à ce que nous avons démontré.

COROLLAIRE I.

Fig. 41, 42 & 43. 58 Lorsque deux Droites *AD*, *AG*, menées d'un même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, sont égales, leurs extrémités *D*, *G*, s'approchent également du bout *B* de la Droite *AB* qui passe par le Centre; c'est-à-dire, que les Arcs *BD*, *BG*, sont égaux. Car si les extrémités des Droites *AD*, *AG*, ne s'écartoient pas également du bout *B* de la Droite qui passe par le Centre, elles ne seroient pas égales (*N*°. 57.).

Et réciproquement

Deux Droites *AD*, *AG*, tirées d'un même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, sont égales, lorsque leurs extrémités s'éloignent également de l'extrémité *B* de la Droite qui passe par le

Centre. Car si ces Droites *AD*, *AG*, n'étoient pas égales, nous avons vû (*N*o. 57.) que leurs extrémités seroient différemment éloignées du Point *B*.

COROLLAIRE II.

59 Donc il est impossible de mener trois Droites égales d'un même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence. Car il faudroit en placer deux égales d'un même côté de la Droite *AB* qui passe par le Centre : ce qui est impossible ; puisque deux Droites *AD*, *AE*, tirées d'un même côté de la Droite qui passe par le Centre, auroient leurs extrémités différemment éloignées du bout de cette Ligne, & seroient par conséquent inégales (*N*o. 57.). Fig. 38, 39 & 40.

Il suit de là que trois Points d'une même Circonférence ne peuvent pas être également éloignés d'un même Point *A* qui n'est pas son Centre ; & que trois Points d'une même Circonférence qui auroit le Point *C* pour Centre, ne peuvent pas appartenir à une autre Circonférence qui auroit le Point *A* pour Centre.

Donc deux Circonférences *FBDF*, *EBDE*, ne peuvent pas se rencontrer en trois Points. Fig. 44 & 45.

COROLLAIRE III.

Pour les Cordes d'un même Cercle ou de Cercles égaux.

60 1o. Le Diamétre *AB* est la plus longue de toutes les Cordes (*N*o. 57.) ; car il passe par le Centre *C* ; & réciproquement la plus longue de toutes les Cordes est le Diamétre (*N*o. 57.). Fig. 46.

2o. De deux Arcs inégaux *AED*, *AE*, moindres chacun que le Demi-cercle, pris dans le même Cercle ou dans des Cercles égaux, le plus grand *AED* aura la plus grande Corde ; c'est-à-dire, que

si l'*Arc* AED > l'*Arc* AE, on aura la *Corde* AD > la *Corde* AE (*N°*. 57.).

3°. De deux Cordes inégales *AD*, *AE*, prises dans un même Cercle ou dans des Cercles égaux, la plus grande *AD* soutient le plus grand Arc; c'est-à-dire, que si la *Corde* AD > la *Corde* AE, on aura l'*Arc* AED > l'*Arc* AE.

4°. Si les Cordes *AD*, *AG*, sont égales, leurs Arcs *AED*, *AHG*, seront égaux.

On aura souvent besoin dans la suite de ce Traité de faire un Arc égal à un autre. Or on voit évidemment que pour cela il n'y aura qu'à prendre la Corde du premier Arc, ou l'intervalle qui est entre ses extrémités; & en quelqu'endroit du même Cercle, ou d'un Cercle égal, qu'on porte cet intervalle, on formera un Arc égal au premier.

5°. Si les Arcs *AED*, *AHG*, sont égaux, les Cordes *AD*, *AG*, seront égales (*N°*. 58.).

Fig. 47. 6°. Donc le milieu d'un Arc est également éloigné de ses deux extrémités; c'est-à-dire, que si le Point *A* divise l'Arc *DAG* en deux parties égales, le Point *A* sera également distant des Points *D*, *G*. Car les Cordes *AD*, *AG*, seront égales.

THÉORÊME.

Fig. 38 & 40. 61 1°. *De toutes les Droites qu'on peut mener d'un Point* A *qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, celle* AM *dont le prolongement passe par le Centre* C *est la plus courte.*

Et réciproquement

2°. *Lorsqu'une Droite* AM *est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un Point* A, *qui n'est pas le Centre du Cercle, à la Circonférence, son prolongement passe toûjours par le Centre* C *du Cercle.*

DÉMONSTRATION.

1°. Pour démontrer que la Droite AM est la plus courte, il suffit de faire voir que toute autre Droite AN qu'on ménera du même Point A à la Circonférence, & dont le prolongement ne passera pas par le Centre, sera plus longue que AM.

Soit tiré le Rayon CN.

Si le Point A est au dedans du Cercle, on aura $NA + AC > NC$ (No. 7.). Mais $NC = MC$. Donc $NA + AC > MC$: & retranchant AC de part & d'autre, on aura (*Ax. X.*) $AN > AM$. *Ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 39.

Si le Point A est hors du Cercle, on aura $AN + NC > AC$: & retranchant le Rayon NC d'une part & le Rayon MC de l'autre, on aura (*Ax. X.*) $AN > AM$. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.* Fig. 40.

Et réciproquement

2°. Si la Droite AM est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un même Point A à la Circonférence, le prolongement de cette Droite passera par le Centre C. Car si son prolongement ne passoit pas par le Centre C, nous venons de voir qu'elle ne seroit pas la plus courte. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

THÉORÊME.

62 *Une Droite* FG *qui rencontre une Circonférence en deux Points* A & B, *coupe le Cercle.* Fig. 41.

DÉMONSTRATION.

Soient tirés deux Rayons CA, CB, aux deux Points A & B où la Circonférence est rencontrée par la Droite FG. Ces deux Rayons étant égaux, ne sont ni l'un ni l'autre perpendiculaires à FG, mais

sont des Obliques également éloignées de la Perpendiculaire tirée du Centre *C* (*N*°. 43.). Ainsi la Perpendiculaire *CD* tirée du Centre tombera au milieu de *AB*. Mais cette Perpendiculaire *CD* est plus courte que les Rayons *CA* ou *CB*; & toutes les Droites tirées du Centre *C* entre *A* & *B* seront plus courtes que les mêmes Rayons *CA*, *CB* (*N*°. 41.). Donc tous les Points de la Droite *AB* contenus entre *A* & *B* sont au dedans du Cercle.

Toutes les Droites qu'on tirera du Centre *C*, entre *A* & *F* ou entre *B* & *G*, sur *FG*, seront plus longues que les Rayons *CA*, *CB* (*N*°. 41.). Ainsi les parties *AF*, *BG*, de la Droite *FG*, sont hors du Cercle.

Donc la Droite *FG*, qui rencontre la Circonférence en deux Points, entre dans le Cercle & en sort, & par conséquent coupe le Cercle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 49. 63 Donc une Tangente *FG* ne rencontre la Circonférence qu'en un seul Point *E*. Car si elle rencontroit la Circonférence en deux Points, elle couperoit le Cercle (*N*°. 62.) & ne seroit pas Tangente.

COROLLAIRE II.

Fig. 49. 64 La Droite *CE*, qu'on ménera du Centre au Point d'attouchement *E*, ne sortira point du Cercle pour aller jusqu'à la Tangente; & toute autre Droite, comme *CD*, tirée du Centre, qui n'ira pas au Point d'attouchement, sera obligée de sortir du Cercle pour arriver à la Tangente. D'où il suit que 1°. La Droite *CE*, menée du Centre au Point d'attouchement, sera la plus courte de toutes les Lignes qu'on peut mener

du Centre à la Tangente, & sera par conséquent perpendiculaire à cette Tangente (*N*°.41.). 2°. Que toute Ligne *CD* menée par le Centre, qui n'ira pas au Point d'attouchement, ne sera pas la plus courte qu'on puisse mener du Centre à la Tangente, & par conséquent ne sera pas perpendiculaire à cette Tangente.

COROLLAIRE III.

65 Donc une Droite *CE* qu'on ménera par le Centre *C* perpendiculairement sur une Tangente *FG*, passera par le Point d'attouchement; car autrement elle ne seroit pas perpendiculaire. Fig. 49.

Ce Corollaire donne la solution du Problême où l'on propose de déterminer le Point où une Tangente rencontre la Circonférence d'un Cercle.

COROLLAIRE IV.

66 Puisque le Rayon *CE*, mené du Centre au Point d'attouchement, est perpendiculaire à la Tangente *FG*, la Tangente *FG* sera réciproquement perpendiculaire au bout du Rayon *CE* qui va au Point d'attouchement.

COROLLAIRE V.

67 Et réciproquement la Droite *FG*, qu'on ménera perpendiculairement au bout du Rayon *CE*, touchera le Cercle au Point *E*. Fig. 49.

Car si cette Perpendiculaire *FG* ne touchoit pas le Cercle au Point *E*, la Droite qui toucheroit le Cercle au Point *E* ne seroit pas perpendiculaire au bout *E* du Rayon: ce qui seroit contradictoire au Corollaire précédent.

Ce Corollaire fournit un moyen facile de mener une Tangente à un Point donné d'une Circonférence.

THÉORÉME.

Fig. 50. 68 *Si la Droite AE est perpendiculaire sur le milieu de la Corde FG, je dis que*

1°. Elle passera par le Centre.

2°. Elle divisera l'Arc FEG en deux Parties égales.

DÉMONSTRATION.

Tout Point qui sera également éloigné des deux bouts de la Droite *FG*, sera dans la Perpendiculaire *AB* (*N°*. 36.).

Mais 1°. le Centre *C* est également éloigné des deux extrémités *F*, *G*, qui sont dans la Circonférence (*N°*. 12.). Donc le Centre est dans la Perpendiculaire *AB*; & par conséquent cette Perpendiculaire passe par le Centre *C*. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

Le milieu *E* de l'Arc *FEG* est également éloigné de ses extrémités *F*, *G* (*N°*. 60.). Ainsi la Perpendiculaire *AB* passera aussi par ce milieu *E*, & coupera par conséquent l'Arc *FEG* en deux parties égales. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Fig. 51. *Ce Théorême donne la solution de deux Problêmes. La premiere partie fournit un moyen facile pour trouver le Centre* C *d'un Cercle ou d'un Arc proposé* ABD: *puisque si l'on mene dans cet Arc deux Cordes* AB, BD, *& qu'on éleve sur leurs milieux des Perpendiculaires* MN, OP, *chacune de ces Perpendiculaires passera par le Centre; & par conséquent elles détermineront ce Centre par leur Point d'intersection.*

La seconde partie donne le moyen de diviser un Arc en deux parties égales.

COROLLAIRE I.

Fig. 50. 69 Puisque (*N°*. 68.) une Droite *AE*, perpendiculaire

diculaire au milieu de la Corde *FG*, passe par le Centre *C*, & divise l'Arc *FEG* en deux parties égales, il est clair que le milieu *B* d'une Corde *FG*, le milieu *E* de son Arc *FEG*, & le Centre *C* du Cercle, sont en Ligne droite; & qu'une Ligne droite menée par deux de ces trois Points *B*, *E*, *C*, passera nécessairement par le troisiéme, & sera en même temps perpendiculaire au milieu de la Corde *FG*: c'est-à-dire, que

1°. Si la Droite *AE* passe par le Centre *C* & par le milieu *B* de la Corde *FG*, elle divisera l'Arc *FEG* en deux parties égales, & sera perpendiculaire au milieu de la Corde *FG*.

2°. Si la Droite *AE* passe par le Centre *C* & par le milieu *E* de l'Arc *FEG*, elle sera perpendiculaire sur le milieu *B* de la Corde *FG*.

3°. Si la Droite *AE* divise la Corde *FG* & son Arc *FEG* en deux parties égales, elle passera par le Centre, & sera perpendiculaire au milieu de la Corde *FG*.

COROLLAIRE II.

70 Comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire au milieu de la Corde *FG* (*N*°. 18.), & que cette perpendiculaire passera par le Centre *C* & par le milieu *E* de l'Arc *FEG* (*N*°. 68.), il est évident qu'une Ligne qui sera perpendiculaire à la Corde *FG*, & qui passera par l'un des trois Points *B*, *E*, *C*, passera nécessairement par les deux autres: c'est-à-dire, que Fig. 50.

1°. Si la Droite *AE* est perpendiculaire sur la Corde *FG*, & divise son Arc *FEG* en deux parties égales, elle passera par le Centre *C* & par le milieu *B* de la Corde *FEG*.

2°. Si la Droite *AE* est perpendiculaire à la Cor-

de *FG*, & passe par le Centre *C*, elle divisera cette Corde & son Arc en deux parties égales.

COROLLAIRE III.

Fig. 52. 71 Donc deux Arcs *AF*, *BG*, sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre deux Cordes paralléles *AB*, *FG*. Car si du Centre *C* l'on tire la Droite *CE* perpendiculairement sur *AB*, elle sera perpendiculaire aux deux Paralléles *AB*, *FG*. Ainsi (*N*°. 70.) elle passera par les milieux des deux Arcs *AEB*, *FEG*; c'est-à-dire, que le Point *E*, où cette Droite rencontrera la Circonférence, sera en même temps le milieu de l'Arc *AEB*, & de l'Arc *FEG*. On aura donc l'*Arc* AFE = l'*Arc* BGE, & l'*Arc* FE = l'*Arc* GE. Donc en retranchant la seconde Égalité de la premiere, on aura l'*Arc* AF = l'*Arc* BG.

Et réciproquement, lorsque deux Arcs *AF*, *BG*, d'un même Cercle, compris entre deux Cordes *AB*, *FG*, sont égaux, ces Cordes sont paralléles. Car si l'on mene un Rayon *CE* au milieu *E* de l'Arc *FEG*, ce Rayon sera perpendiculaire à la Corde *FG* (*N*°. 69.). Mais *E* sera aussi le milieu de l'Arc *AFEGB*. Ainsi le Rayon *CE* sera encore perpendiculaire à la Corde *AB* (*N*°. 69.). Le même Rayon *CE* sera donc perpendiculaire aux deux Cordes *AB*, *FG*: d'où il suit (*N*°. 31.) que ces deux Cordes seront perpendiculaires à la même Droite *CE*, & seront par conséquent paralléles (*N*°. 48.).

72 *Ce Corollaire donne le moyen de mener par un Point donné une Paralléle à une Ligne donnée. Car si l'on propose de mener par le Point* F *une Paralléle à la Droite* AB, *d'un Point quelconque* C *pris pour Centre, on décrira par le Point* F *un Arc* AFEGB *qui coupera la Droite* AB *en deux Points* A & B; *puis faisant l'Arc* BG *égal à l'Arc* AF, *on ménera par le Point* G & *par le Point donné* F *la Paralléle demandée* FG.

COROLLAIRE IV.

73 Donc deux Arcs *AE*, *BE*, sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre une Corde *AB* & une Tangente *FG*, qui sont paralléles. Car si l'on tire le Rayon *CE* au Point d'attouchement *E*, il sera perpendiculaire sur la Tangente *FG* (*N*°. 64.) ; & il sera aussi perpendiculaire sur la Corde paralléle *AB* (*N*°. 49.) : & par conséquent il divisera l'Arc *AEB* en deux parties égales. Donc le Point d'attouchement *E* d'une Tangente paralléle à une Corde *AB*, divise l'Arc *AEB* en deux parties égales. Fig. 53.

THÉORÉME.

74 1°. *Deux Circonférences qui se coupent ne se rencontrent qu'en deux Points.*

2°. *Et réciproquement deux Circonférences qui se rencontrent en deux Points* B *&* D, *se coupent.*

DÉMONSTRATION.

1°. Deux Circonférences ne peuvent jamais se rencontrer en trois Points sans se confondre (*N*°. 59.). Ainsi deux Circonférences qui se coupent ne peuvent se rencontrer qu'en deux Points, savoir, au Point d'entrée de l'une dans l'autre, & au Point de sortie. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.* Fig. 54.

2°. Du Centre *A* de l'un des Cercles, soient tirés les Rayons *AB*, *AD*, aux Points où les Circonférences se rencontrent. Ces deux Droites *AB*, *AD*, étant égales, aucune des deux ne passera par le Centre *C* de l'autre Cercle *BGDE* ; mais elles aboutiront à des Points *B* & *D* également distants de l'extrémité *E* de la Droite *AE* qui passe par le Centre *C* de ce Cercle (*N*°. 58.). Qu'on imagine présentement

une infinité de Droites tirées du même Point *A* à tous les Points de la Circonférence *BGDEB*. Toutes les Droites qui iront aboutir à l'Arc *BGD* seront plus courtes que les Rayons *AB*, *AD*, (*N°*. 57.); & celles qui aboutiront à l'Arc *BED* seront plus longues que les Rayons *AB*, *AD* (*N°*. 57.). Donc l'Arc *BGD* est au dedans du Cercle *FBDF*, & l'Arc *BED* est au dehors du même Cercle *FBDF*: & par conséquent les deux Cercles *FBDF*, *BGDEB*, qui se rencontrent en deux Points, se coupent. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 55 & 56. 75 Donc deux Circonférences *X* & *Z* qui se touchent, ne se rencontrent qu'en un Point *E*. Car si elles se rencontroient en deux Points, elles se couperoient.

COROLLAIRE II.

Fig. 55 & 56. 76 Donc la Droite *AE*, tirée du Centre *A* du Cercle *X* au Point d'attouchement des deux Cercles, est la plus courte de toutes les Droites qu'on puisse mener du Point *A* à la Circonférence du Cercle *Z*. Car le Point *E* étant le seul qui appartienne aux deux Cercles *X* & *Z*, toute autre Ligne, comme *AB*, qu'on pourroit tirer du même Centre *A* à la Circonférence du Cercle *Z*, sortira du Cercle *X* pour aller au Cercle *Z*; & sera par conséquent plus longue que le Rayon *AE* du Cercle *X*.

COROLLAIRE III.

Fig. 55 & 56. 77 Donc si l'on prolonge la Droite *AE*, tirée du Centre *A* du Cercle *X* au Point d'attouchement *E* des deux Cercles, le prolongement passera par le Centre *C* de l'autre Cercle *Z* (*N°*. 61.). Car elle est

la plus courte qu'on puisse tirer du Point *A* au Cercle Z : & par conséquent lorsque deux Cercles se touchent, les deux Centres & le Point d'attouchement sont en Ligne droite.

1°. *On déterminera donc suivant ce Corollaire le Point* E *où deux Cercles se touchent, en menant une Ligne droite* AC *par les Centres* A *&* C *de ces deux Cercles.* Fig. 55 & 56.

2°. *Le même Corollaire donne aussi le moyen de décrire un Cercle ou une portion de Cercle qui touche un autre Cercle en un Point donné. Car si l'on mene une Ligne droite par le Centre du Cercle donné & par le Point d'attouchement, il est évident que le Centre de l'autre Cercle doit être dans la même Ligne.*

Cette derniere opération est d'un grand usage pour composer différentes Courbes, avec des portions d'un même Cercle ou de différens Cercles qui se touchent, de maniere que la Courbe composée paroisse n'être qu'une seule & même Courbe. Nous en avons des exemples dans différentes Courbes ou Moulures employées par les Architectes.

La DOUCINE *& le* TALON EDC *sont des Courbes qui ont un Point d'inflexion* D, *& qui sont composées de deux Arcs de Cercle qui se touchent à ce Point d'inflexion. Ainsi les Centres* A, B, *des deux Arcs* ED, DC, *& le Point d'attouchement* D *de ces deux Arcs, doivent être dans une même Ligne droite* ADB. Fig. 57 & 58.

Les ANSES DE PANIERS, *qui ressemblent à des Demi-ellipses, sont composés de trois Arcs de Cercles, dont celui* DF *du milieu est touché à ses extrémités* D, F, *par les deux autres* ED, FG. *Ainsi le Centre* A *de l'Arc* DE, *le Centre* B *de l'Arc* DF, *& leur Point d'attouchement* D, *par lequel se joignent ces deux Arcs, sont dans une même Ligne droite* DB. *De même le Centre* B *de l'Arc* DF, *le Centre* C *de l'Arc* FG, *& le Point d'attouchement* F *où se joignent ces deux Arcs, sont dans une même Ligne droite* FB. Fig. 59.

Fig. 60. *Les* VOLUTES, *qui ressemblent aux Spirales, sont composées de plusieurs Arcs* ED, DF, FG, *qui se succedent & qui se touchent aux Points où ils s'unissent. Ainsi le Centre* A *du premier Arc* ED, *le Centre* B *du second* DF, *& le Point d'attouchement* D *où se joignent ces deux Arcs, sont dans la même Ligne droite* DB. *De même le Centre* B *de l'Arc* DF, *le Centre* C *de l'Arc suivant* FG, *& le Point d'attouchement* F *de ces deux Arcs, sont dans une même Droite* BF. *Il en sera de même des autres Arcs qui se succéderont, & qui paroîtront ne faire avec les Arcs précédens qu'une même Courbe non interrompue.*

CHAPITRE VI.

De la division de la Circonférence du Cercle, & de son usage dans la mesure des Angles.

78 LES Mathématiciens sont convenus de diviser toutes les Circonférences en 360 parties égales, & d'appeler *Degré* chacune de ces parties. Ainsi

La Circonférence de tout Cercle, grand ou petit, contient 360 Degrés.

La Demi-circonférence contient 180 Degrés.

Le Quart de la Circonférence contient 90 Degrés, & se nomme quelquefois *Quart de nonante.*

Le Degré se partage en 60 parties égales appelées *Minutes premieres* ou simplement *Minutes.*

La Minute se divise en 60 parties égales appelées *Minutes secondes* ou simplement *Secondes.*

On sous-divise la Seconde en 60 *Tierces*, la Tierce en 60 *Quartes*, la Quarte en 60 *Quintes*; & ainsi de suite.

Le Degré se distingue par °, ou par *d* qui est la lettre initiale de *degré*, ou par g qui est la lettre initiale du mot *Gradus* lequel signifie *Degré*; la Minute par ′, la Seconde par ″, la Tierce par ‴; la Quarte par ⁗ ou par ^{IV}, la Quinte par ^{V}. Ces caracteres s'écrivent à la droite du nombre un peu au-dessus. Par exemple,

Pour exprimer { 90 Degrés, 45 Minutes, 30 Secondes, 45 Tierces } *on écrit* { 90°. 45′. 30″. 45‴. }

COROLLAIRE I.

79 Donc si une Droite *AC* en se mouvant autour d'un Point *C* fait une révolution entiere dans un Plan, de maniere qu'elle revienne dans la situation *AC* d'où elle est partie, chacun de ses Points *M*, *O*, *P*, décrira une Circonférence entiere dont *C* sera le Centre. Ainsi chaque Point *M*, *O*, *P*, décrira 360°. Fig. 61.

Mais si la Droite *AC* ne fait que la trois cent-soixantiéme partie d'une révolution, chaque Point *M* ou *O* ou *P* de cette Ligne ne décrira que la 360e partie d'une Circonférence, & par conséquent ne tournera que d'un Degré.

Donc enfin chaque Point *M* ou *O* ou *P* de la Droite *AC* décrira autant de Degrés, que la Droite *AC* fera de fois la 360e partie d'une révolution autour du Point immobile *C*.

COROLLAIRE II.

80 Donc si l'on prend pour Centre le Sommet *C* d'un Angle *ACB*, & qu'on décrive un Arc *MQ* entre les côtés de cet Angle, cet Arc *MQ* exprime Fig. 61.

ra par le nombre de ses Degrés, minutes & secondes, la quantité dont un côté *A C* aura tourné pour s'écarter de l'autre côté *B C*, & former l'Angle *A C B*.

Nous avons dit (*N*°. 14.) qu'un Angle n'est autre chose que l'ouverture de deux Droites *A C*, *B C*, qui se rencontrent en un même point *C*; & nous avons fait remarquer (*N*°. 15.) que la grandeur d'un Angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais seulement de la quantité dont ils ont tourné sur leur Sommet *C*, pour s'écarter l'un de l'autre, & former l'ouverture qui est entr'eux. Il faut donc estimer la grandeur d'un Angle par la quantité dont ses côtés ont tourné pour s'ouvrir, ou s'écarter l'un de l'autre : & comme les Arcs de Cercles sont commodes pour exprimer la quantité de cette rotation, c'est par le moyen du Cercle ou de sa Circonférence que nous allons mesurer les Angles.

Comme un Angle peut avoir quatre situations différentes par rapport au Cercle, qu'il peut avoir son Sommet au Centre, ou dans la Circonférence, ou entre le Centre & la Circonférence, ou enfin au dehors du Cercle, nous emploierons quatre Théorêmes pour démontrer les mesures des Angles dans ces quatre situations.

THÉORÊME.

Fig. 61. 81 *Un Angle* ACB, *qui a son Sommet au Centre d'un Cercle, a pour mesure l'Arc* MQ *compris entre ses côtés.*

DÉMONSTRATION.

Puisque l'Angle *ACB* a son Sommet au Centre C du Cercle, l'Arc MQ compris entre ses côtés expri-

mera par le nombre de ses Degrés, minutes & secondes, la quantité dont un côté *AC* aura tourné pour s'écarter de l'autre côté *BC*, & former l'ouverture qui est entr'eux. Ainsi l'Arc *MQ* peut être regardé comme la mesure de l'ouverture de l'Angle *ACB*.

Mais l'Angle *ACB* n'est autre chose que l'ouverture de ses côtés *AC*, *BC* (*N*o. 14.).

Donc l'Angle *ACB*, qui a son Sommet au Centre *C* d'un Cercle, a pour mesure l'Arc *MQ* compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

82 Donc si deux Angles égaux *ACB*, *DCE*, ont le Sommet au Centre d'un Cercle, les Arcs *MQ*, *PR*, compris entre leurs côtés, seront égaux. Car ces Arcs sont les mesures de ces Angles; & les Angles égaux ont des mesures égales. Fig. 62.

Et réciproquement, deux Angles sont égaux, quand ils ont leurs Sommets au Centre d'un même Cercle ou de Cercles égaux, & qu'ils comprennent entre leurs côtés des Arcs égaux; ou lorsqu'ils ont leurs Sommets aux Centres de différens Cercles, & qu'ils comprennent entre leurs côtés des Arcs d'un même nombre de Degrés.

Ce Corollaire donne le moyen de mener au Point c *d'une Ligne* cb *une Droite* ac *qui fasse un Angle* acb *égal à un Angle donné* ACB. *Car si du Sommet* C *de l'Angle donné* ACB, *comme Centre, on décrit entre ses côtés un Arc* MQ, *& qu'après avoir décrit du Point donné* c *comme Centre, avec la même ouverture de Compas, un Arc* mq *qui rencontre* cb *en* q, *on fasse l'Arc* mq = MQ, *& qu'on tire la Droite* cma, *l'Angle* acb *sera égal à l'Angle donné* ACB; *puisque ces deux Angles* Fig. 63 & 64.

auront leurs Sommets aux Centres de deux Cercles égaux ; & comprendront entre leurs côtés des Arcs égaux.

Lorsqu'on sait mener à un Point donné une Ligne qui fasse avec une Ligne donnée un Angle égal à un autre Fig. 65. *Angle, on est en état de mener par un Point donné* A *une Parallèle* AD *à une Droite* MN *donnée de position. Car après avoir mené par le Point* A *une Droite* AC *qui fasse avec* MN *un Angle* ACM, *si l'on tire par le même Point* A *une Droite* AD *qui fasse avec* AC *un Angle* DAC *égal à l'Angle* ACM, *la Droite* AD *sera parallèle à* MN *(N°. 51.).*

Fig. 66. *Puisqu'on sait (N°. 68.) diviser un Arc en deux parties égales, on est maintenant en état de diviser un Angle quelconque* ACB *en deux parties égales. Car si du Sommet* C *de l'Angle qu'on veut diviser, comme Centre, on décrit un Arc* MQ *entre les côtés de cet Angle, & qu'on mene par le même Sommet* C *une Droite* CE *qui divise cet Arc* MQ *en deux parties égales, cette Droite* CE *divisera aussi l'Angle* ACB *en deux parties égales* ACE, BCE; *puisque ces deux Angles* ACE, BCE, *auront leur Sommet* C *au Centre de l'Arc* MQ, *& comprendront chacun la moitié de l'Arc* MQ.

Corollaire II.

Fig. 67. 83 Donc un Angle Droit *ACB* a pour mesure un Quart de Circonférence ou 90 Degrés. Car si du Point *C* comme Centre, où se croisent deux Droites *AE*, *BD*, perpendiculaires l'une à l'autre, on décrit une Circonférence *MQPR*, les quatre Angles droits *ACB*, *BCE*, *ECD*, *DCA*, auront pour mesures les quatre Arcs *MQ*, *QP*, *PR*, *RM*. Mais les quatre Angles droits sont égaux ; ainsi les quatre Arcs qui leur servent de mesure sont aussi égaux : & comme ces quatre Arcs composent ensemble la Circonférence entiere, chacun d'eux n'en vaut que

le quart. D'où il suit que chaque Angle droit a pour mesure un Quart de Cercle ou 90 Degrés.

Corollaire III.

84 Puisqu'un Angle aigu est plus petit qu'un Angle droit, il aura pour mesure un Arc plus petit qu'un Quart de Cercle, & vaudra par conséquent moins que 90 Degrés.

Corollaire IV.

85 Donc un Angle obtus a pour mesure un Arc plus grand qu'un Quart de Cercle, & vaut par conséquent plus que 90 Degrés; puisqu'il est plus grand qu'un Angle droit.

Corollaire V.

86 Et réciproquement, un Angle est droit, quand il a pour mesure un Quart de Cercle ou 90 Degrés; un Angle est aigu, quand il a pour mesure un Arc moindre que le Quart de Cercle ou que 90 Degrés; un Angle est obtus, quand il a pour mesure un Arc plus grand que le Quart de Cercle, ou qu'il vaut plus que 90 Degrés.

Corollaire VI.

87 Comme deux Angles de suite valent ensemble deux Angles droits, ils auront ensemble pour mesure un Demi-cercle ou 180 Degrés.

Avertissement.

Comme deux Angles qui valent ensemble deux Droits, c'est-à-dire, 180 Degrés, sont appelés Supplément l'un de l'autre, lorsque deux Arcs vaudront ensemble un Demi-cercle ou 180 Degrés, nous dirons aussi que l'un est Supplément de l'autre.

THÉORÊME.

Fig. 68, 69, 70, 71, 72 & 73. 88 *Un Angle* B A C, *dont le Sommet est à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc* E D *compris entre ses côtés, lorsqu'il est formé par deux Cordes, ou par une Tangente & par une Corde ; c'est-à-dire, lorsque ses côtés prolongés au-delà du Sommet ne peuvent plus rencontrer la Circonférence.*

DÉMONSTRATION.

La mesure d'un Angle, quelle que soit la situation de son Sommet, est égale à l'Arc qu'il comprendroit entre ses côtés s'il avoit son Sommet au Centre. Ainsi en disant que les Angles dont il est question, ont pour mesure la moitié de l'Arc compris entre leurs côtés, on entend que si ces Angles avoient leurs Sommets au Centre, ils ne comprendroient entre leurs côtés que la moitié de l'Arc qu'ils comprennent ayant leurs Sommets à la Circonférence. Comme il peut arriver trois Cas, nous partagerons la démonstration du Théorême en trois parties.

Fig. 68 & 69. *Premier Cas.* Si un côté *AB* de l'Angle *BAC* passe par le Centre O, soit tirée par ce Centre O une Droite *MP* paralléle à l'autre côté *AC*.

On aura l'Angle *BAC*=*BOP* (*N°*. 50.). Mais l'Angle *BOP* ayant son Sommet au Centre a pour mesure l'Arc *DP* (*N°*. 81.). Donc l'Angle *BAC* a aussi pour mesure l'Arc *DP*. Il nous reste maintenant à démontrer que l'Arc *DP* n'est que la moitié de l'Arc *DPE*.

Les Angles *BOP*, *AOM*, qui ont leur Sommet au Centre O, sont égaux (*N°*. 30.). Ainsi *DP*=*AM* (*N°*. 82.). Mais l'Arc *AM*=*PE* (*N°*. 71 *ou* 73.). Donc l'Arc *DP*=*PE* ; & par conséquent *DP* est la moitié de l'Arc *DPE*. Donc l'Angle *BAC* a pour

mesure la moitié de l'Arc *DPE* compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Second Cas. Si le Centre O est compris entre les deux côtés de l'Angle *BAC*, soit tirée la Droite *AP* par le Sommet *A* & par le Centre O. L'Angle *BAC* sera partagé en deux Angles *BAP*, *PAC*, qui seront dans le premier Cas ; c'est-à-dire, que chaque Angle aura un côté *AP* qui passera par le Centre O. Ainsi Fig. 70 & 71.

1°. L'Angle *BAP* aura pour mesure la moitié de l'Arc *DP*.

2°. L'Angle *PAC* aura pour mesure la moitié de l'Arc *PE*.

Donc l'Angle entier *BAC* aura pour mesure la moitié de l'Arc *DP* avec la moitié de l'Arc *PE*, c'est-à-dire, la moitié de l'Arc *DPE* compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Troisiéme Cas. Si le Centre O n'est ni dans un côté ni entre les côtés de l'Angle *BAC*, soit tirée la Droite *AP* par le Sommet *A* & par le Centre O. Fig. 72 & 73.

1°. La somme des deux Angles *BAC*, *CAP*, ou l'Angle total *BAP*, ayant un côté qui passe par le Centre, a pour mesure la moitié de l'Arc *DEP* (*Cas* 1.), c'est-à-dire, $\frac{DE}{2} + \frac{EP}{2}$.

2°. Mais l'Angle *CAP* a pour mesure la moitié de l'Arc *EP* ou $\frac{EP}{2}$ (*Cas* 1.).

Donc l'autre Angle *BAC* a pour mesure $\frac{DE}{2}$, c'est-à-dire, la moitié de l'Arc compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

Donc dans tous les cas un Angle *BAC*, dont le Sommet est à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés, lorsqu'il est formé par deux Cordes ou par une Tangente & par une Corde ; c'est-à-dire, lorsque ses côtés prolon-

gés au-delà du Sommet ne peuvent plus rencontrer la Circonférence. *Ce qu'il falloit démontrer.*

89 *On a supposé dans ce Théorême que les côtés de l'Angle* BAC, *étant prolongés au-delà du Sommet* A, *ne pouvoient plus rencontrer la Circonférence. On va maintenant démontrer que si l'Angle* BAC, *dont le Sommet est à la Circonférence, avoit un Côté* AB, *qui, prolongé au-delà du Sommet, pût encore rencontrer la Circonférence par son prolongement* AD, *cet Angle* BAC *auroit pour mesure la moitié de l'Arc* AE *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc* AD *soutenu par le prolongement* AD *du côté* AB.

Fig. 74.

Car les Angles BAC, CAD, *valent ensemble deux Angles droits. Ainsi ils ont ensemble pour mesure un Demi-cercle,* c'est-à-dire, $\frac{AE}{2}+\frac{AD}{2}+\frac{ED}{2}$. (*N*o. 87.). *Mais l'Angle* CAD *a pour mesure* $\frac{ED}{2}$ (*N*o. 88.). *Donc l'Angle* BAC *a pour mesure la moitié des deux autres Arcs du Cercle, c'est-à-dire,* $\frac{AE}{2}+\frac{AD}{2}$.

COROLLAIRE I.

Fig. 75. 90 Puisque les Angles qui ont le Sommet à la Circonférence, ont pour mesure les moitiés des Arcs compris entre leurs côtés, lorsque ces côtés prolongés au-delà du Sommet ne rencontrent plus la Circonférence, il est évident que

Les Angles *ABD*, *DCE*, qui ayant leur Sommet à la Circonférence sont appuyés sur des Arcs égaux *AD*, *DE*, sont égaux; & que les Angles *BAC*, *BDC*, *BEC*, qui ont le Sommet à la Circonférence, & qui sont appuyés sur le même Arc *BC*, sont aussi égaux.

Et réciproquement, lorsque des Angles égaux auront le Sommet à la Circonférence d'un même Cercle, les Arcs qu'ils comprendront entre leurs côtés seront égaux. Car si ces Arcs n'étoient point

égaux, les Angles qui les comprendroient & qui auroient pour mesure la moitié de ces Arcs, ne seroient pas égaux.

Il est encore évident que si deux Angles inégaux ont le Sommet à la Circonférence, ils comprendront entre leurs côtés des Arcs inégaux; & que le plus grand Angle contiendra le plus grand Arc.

Et réciproquement, si deux Angles qui ont le Sommet à la Circonférence, comprennent entre leurs côtés des Arcs inégaux, celui qui contiendra le plus grand Arc sera le plus grand.

Corollaire II.

91 1°. Un Angle *BAC* est droit, quand il a son Sommet à la Circonférence, & qu'il est appuyé sur le Diametre *BC*, c'est-à-dire, lorsqu'il renferme entre ses côtés un Demi-cercle *BDC*, ou qu'il est renfermé dans un Demi-cercle *BAC*. Car alors il a pour mesure un Quart de Cercle, & par conséquent il est droit (*N*°. 86.). Fig. 76.

2°. Un Angle *BAC* est obtus, lorsqu'il a le Sommet à la Circonférence, & qu'il renferme entre ses côtés un Arc *BDC* plus grand que le Demi-cercle, ou qu'il est renfermé dans un Arc *BAC* plus petit que le Demi-cercle (*N*°. 86.). Car alors il a pour mesure un Arc plus grand que le Quart de Cercle. Fig. 77.

3°. Un Angle *BAC* est aigu, quand il a le Sommet à la Circonférence, & qu'il renferme entre ses côtés un Arc *BC* plus petit que le Demi-cercle, ou qu'il est renfermé dans un Arc *BADC* plus grand que le Demi-cercle (*N*°. 86.). Car alors il a pour mesure un Arc plus petit que le Quart de Cercle. Fig. 78.

La premiere partie de ce Corollaire nous fournit un nouveau moyen pour mener une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne, lorsque cette Ligne ne peut pas être prolongée.

Fig. 79. 92 1°. *Si l'on veut mener une Perpendiculaire par l'extrémité* A *de la Droite* AC, *d'un Point quelconque* F, *pris pour Centre au dehors de cette Ligne, on décrira par le Point* A *un Arc* BAE *qui rencontrera la Droite* AC *dans un second Point* E. *Puis ayant mené par le Centre* F *& par ce Point* E *un Diametre* EFB, *on tirera la Droite* BA, *qui sera perpendiculaire sur* AC. *Car l'Angle* BAC, *ayant le Sommet à la Circonférence & étant appuyé sur le Diametre* BE, *sera droit.*

Fig. 80. 93 2°. *Si d'un Point* A, *pris au dehors d'une Droite* BC, *on veut tirer une Perpendiculaire à cette Ligne, on ménera par ce Point* A, *une Oblique* AE *qui rencontrera* BC *en un Point quelconque* E. *Puis ayant décrit sur cette Oblique* AE, *comme Diametre, un Demi-cercle* ABE, *qui rencontre la Droite* BC *dans un second Point* B, *on ménera la Droite* AB *qui sera nécessairement perpendiculaire à* BC, *puisque l'Angle* ABE *sera droit.*

Fig. 81. 94 *La même premiere partie du dernier Corollaire & la derniere construction de la Perpendiculaire nous conduisent à une méthode facile pour mener d'un Point* A *donné hors d'un Cercle, une Tangente* AB, *à sa Circonférence, & pour déterminer en même temps le Point d'attouchement. Car si du Point* A, *par lequel doit passer la Tangente, on mene une Droite* AC *au Centre* C, *& que sur cette Droite comme Diametre on décrive un Cercle* ABCb, *les Points* B, b, *où cette nouvelle Circonférence rencontrera la Circonférence donnée, seront ceux où les Tangentes qu'on peut mener par le Point* A *rencontreront la Circonférence donnée : puisque si l'on mene les Droites* AB, Ab, *& les Rayons* CB, Cb, *les Angles* ABC, AbC, *seront droits ; & que les Droites* AB, Ab, *seront perpendiculaires aux extrémités des Rayons* CB, Cb, *& par conséquent Tangentes* (*N*°. 67.).

THÉORÊME.

THÉORÉME.

95 *Un Angle* BAC, *qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, & dont les côtés sont prolongés au-delà du Sommet jusqu'à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc* EF *compris entre les côtés de son opposé au Sommet.* Fig. 82.

DÉMONSTRATION.

Par le Point F, où le prolongement de l'un des côtés rencontre la Circonférence, soit tirée la Droite FD paralléle à l'autre côté AC. On aura l'Angle $BAC = BFD$. Mais (*N*°. 88.) l'Angle BFD a pour mesure la moitié de l'Arc BD, c'est-à-dire, $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. Donc l'Angle BAC a aussi pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$.

Mais $\frac{CD}{2} = \frac{EF}{2}$, parce que $CD = EF$ (*N*°. 71.). Donc l'Angle BAC a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut aussi démontrer que l'Angle BAE, *qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc* BE *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc* FC *compris entre les côtés de son opposé au Sommet.*

Car les Angles BAE, BAC, valent ensemble deux Droits, & ont par conséquent pour mesure un Demi-cercle, c'est-à-dire, $\frac{BE}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{FC}{2} + \frac{EF}{2}$. Mais nous venons de voir que l'Angle BAC a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Donc l'Angle BAE a pour mesure $\frac{BE}{2} + \frac{FC}{2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Donc en général un Angle qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc compris entre les côtés de son opposé au Sommet. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Avertissement.

Fig. 83, 84 & 85. Un Arc *DPE*, dont la concavité est tournée vers le Sommet de l'Angle *BAC* entre les côtés duquel il est compris, s'appelle *Arc concave*; & un Arc *MN*, dont la convexité est tournée vers le Sommet de l'Angle *BAC* dans lequel il est compris, s'appelle *Arc convexe.* Ainsi le même Angle *BAC* comprend entre ses côtés un Arc concave *DPE* & un Arc convexe *MN*.

THÉORÉME.

Fig. 83, 84 & 85. 96 *Un Angle* BAC, *qui a le Sommet hors le Cercle, & qui comprend entre ses côtés un Arc concave* DPE *& un Arc convexe* MN, *a pour mesure la moitié de la différence des deux Arcs* DPE, MN, *compris entre ses côtés.*

Démonstration.

Du Point *M*, où l'un des côtés *AB* rencontre la Circonférence, soit tirée la Droite *MP* parallèle à l'autre côté *AC*.

On aura l'Angle $BAC = BMP$ (*N*o. 50.). Mais l'Angle *BMP* a pour mesure $\frac{DP}{2}$ (*N*o. 88.). Donc l'Angle *BAC* a aussi pour mesure $\frac{DP}{2}$. Mais $PE = MN$ (*N*o. 71 ou 73.). Ainsi *DP* est la différence qu'il y a entre les deux Arcs *DPE*, *MN*. Donc l'Angle *BAC* (ayant pour mesure la moitié de *DP*) a pour mesure la moitié de la différence qu'il y a entre l'Arc concave *DPE* & l'Arc convexe *MN* compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

97 $DPE - MN$ *est la différence des deux Arcs* DPE, MN. *Ainsi* $\frac{DPE}{2} - \frac{MN}{2}$ *est la moitié de la différence de ces deux Arcs. Mais nous venons de voir que l'Angle* BAC *a pour mesure la moitié de la différence des*

deux Arcs DPE, MN, *compris entre ses côtés. Donc l'Angle* BAC *a aussi pour mesure* $\frac{DPE}{2} - \frac{MN}{2}$, *c'est-à-dire, la moitié de l'Arc concave compris entre ses côtés, moins la moitié de l'Arc convexe aussi compris entre ses côtés.*

SCHOLIE.

98 Il suit des trois derniers Théorêmes qu'on vient de démontrer, que

1°. Un Angle qui a pour mesure la moitié d'un Arc concave compris entre ses côtés, a son Sommet à la Circonférence du Cercle dont cet Arc fait partie; parce que s'il avoit son Sommet au-dedans ou au-dehors du Cercle, il auroit une mesure plus grande ou plus petite que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (*N*°. 95 ou 96.).

2°. Un Angle dont la mesure est plus grande que la moitié de l'Arc concave qu'il comprend entre ses côtés, a son Sommet au-dedans du Cercle; puisque s'il avoit son Sommet à la Circonférence ou au dehors du Cercle, sa mesure seroit égale à la moitié, ou plus petite que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (*N*°. 88 ou 96.).

3°. Un Angle dont la mesure est plus petite que la moitié de l'Arc concave compris entre ses côtés, a le Sommet au-dehors du Cercle; car s'il avoit son Sommet à la Circonférence ou au-dedans du Cercle, sa mesure seroit égale à la moitié, ou plus grande que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (*N*°. 88 ou 95.).

COROLLAIRE I.

99 Il suit de la premiere partie de ce Scholie, que si l'on fait glisser les côtés d'un Angle invariable *BAC*, sur deux Points fixes *M*, *N*, le Sommet *A* de cet Angle décrira un Arc de Cercle *MAN*. Car l'Angle invariable étant dans une situation quel- Fig. 86.

conque *B A C*, si l'on fait passer par les deux Points fixés *M*, *N*, & par le Sommet *A*, une Circonférence *MANEM*, l'Angle *BAC* ou *MAN* aura pour mesure la moitié de l'Arc *MEN* compris entre ses côtés (*N*o. 88.). Mais dans quelqu'autre situation qu'on mette l'Angle *BAC*, en faisant glisser ses côtés sur les Points *M*, *N*, il aura toûjours pour mesure la moitié du même Arc *MEN*, puisqu'il est invariable. Donc son Sommet *A* sera toûjours dans la Circonférence, & décrira par conséquent un Arc de Cercle *MAN* (*N*o. 98.).

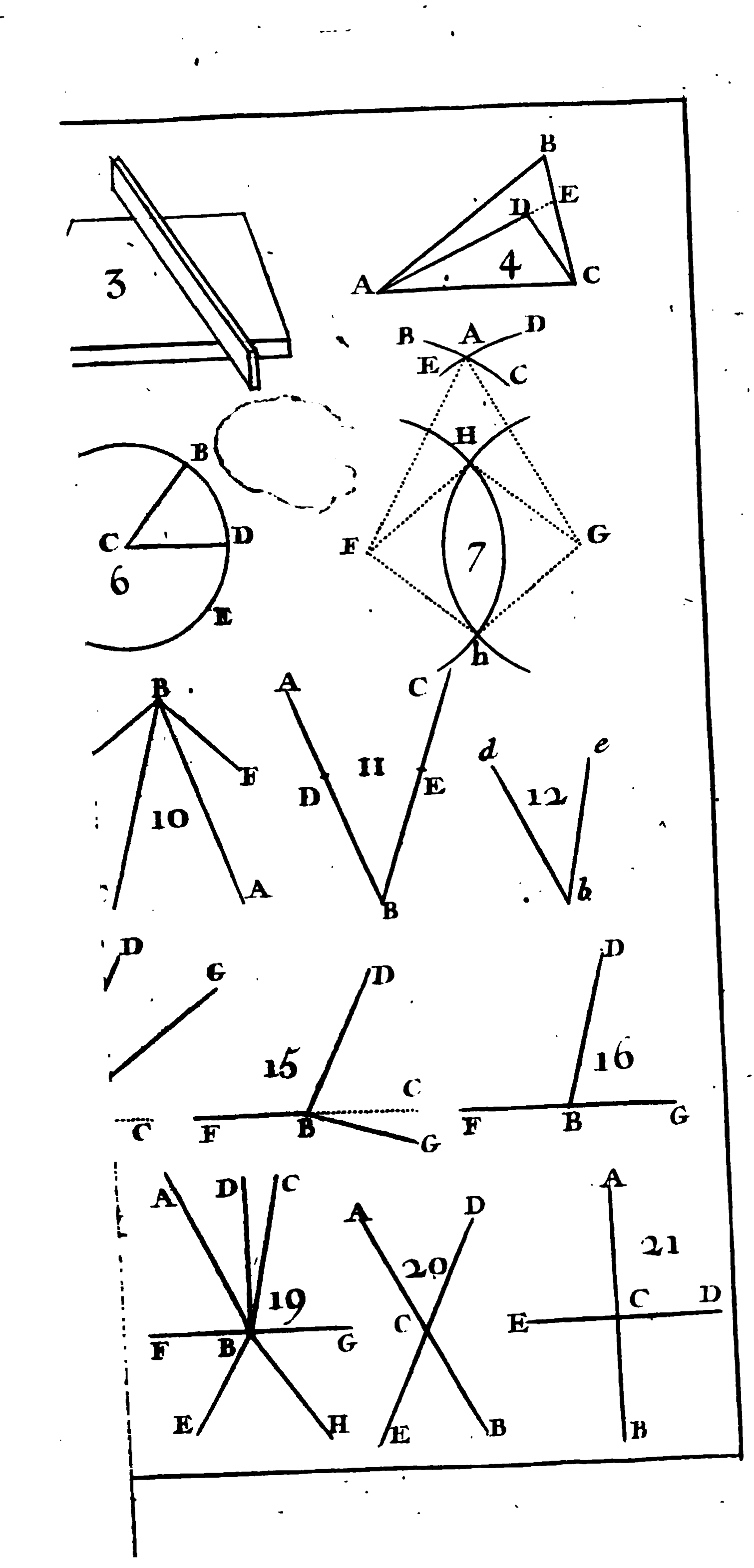
COROLLAIRE II.

Fig. 86. 100 La moitié de l'Arc *MAN* est le supplément de la moitié de l'Arc *MEN*, ou de la mesure de l'Angle invariable *BAC*. Donc l'Arc *MAN*, décrit par le Sommet *A* de l'Angle invariable, est double du supplément de la mesure de l'Angle *BAC*.

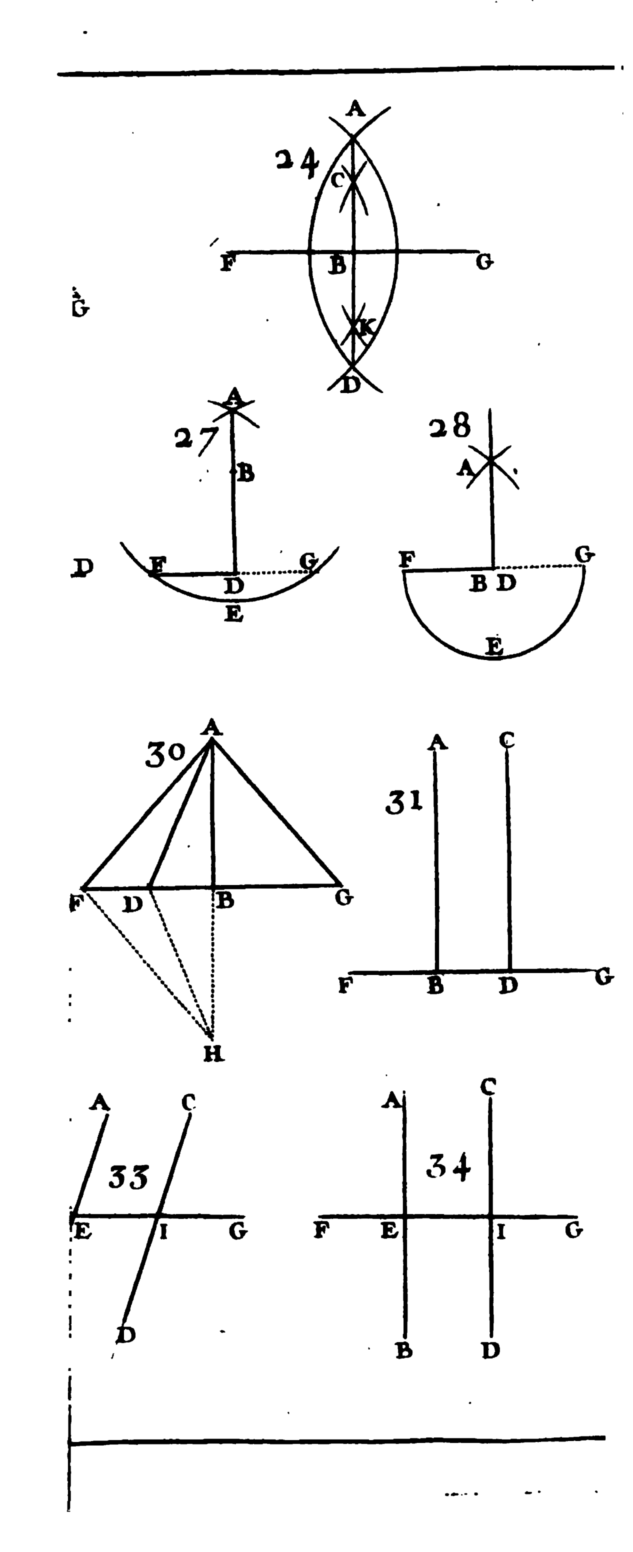
D'où il suit que si l'Angle invariable *BAC* est droit, l'Arc *MAN*, décrit par son Sommet, sera un Demi-cercle.

On fait usage de ces Angles invariables pour décrire sans Compas ni Cordeau des Arcs d'un nombre de degrés donné, lorsque leur Centre est très-éloigné.

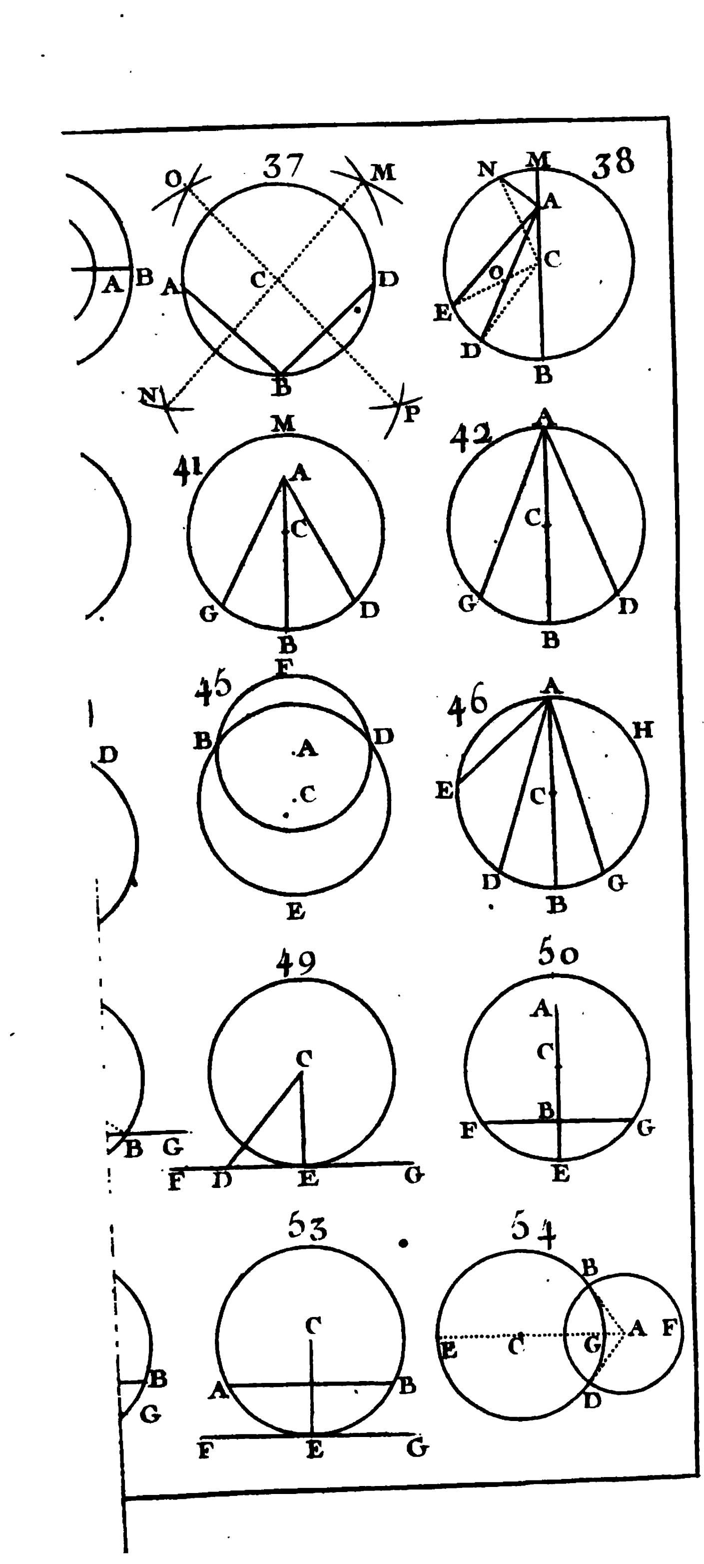
Fig. 87. *Par exemple, pour décrire un Arc de 30 degrés sur une Corde* MN *de longueur donnée, on fera un Angle* BAC, *qui aura pour mesure le supplément de la moitié de l'Arc* MAN *de 30 degrés que l'on veut décrire ; c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure 165 degrés, supplément de 15 degrés : & faisant glisser les côtés de cet Angle sur les extrémités de la Droite* MN *donnée pour Corde, son Sommet décrira un Arc* MAN *de 30 degrés.*

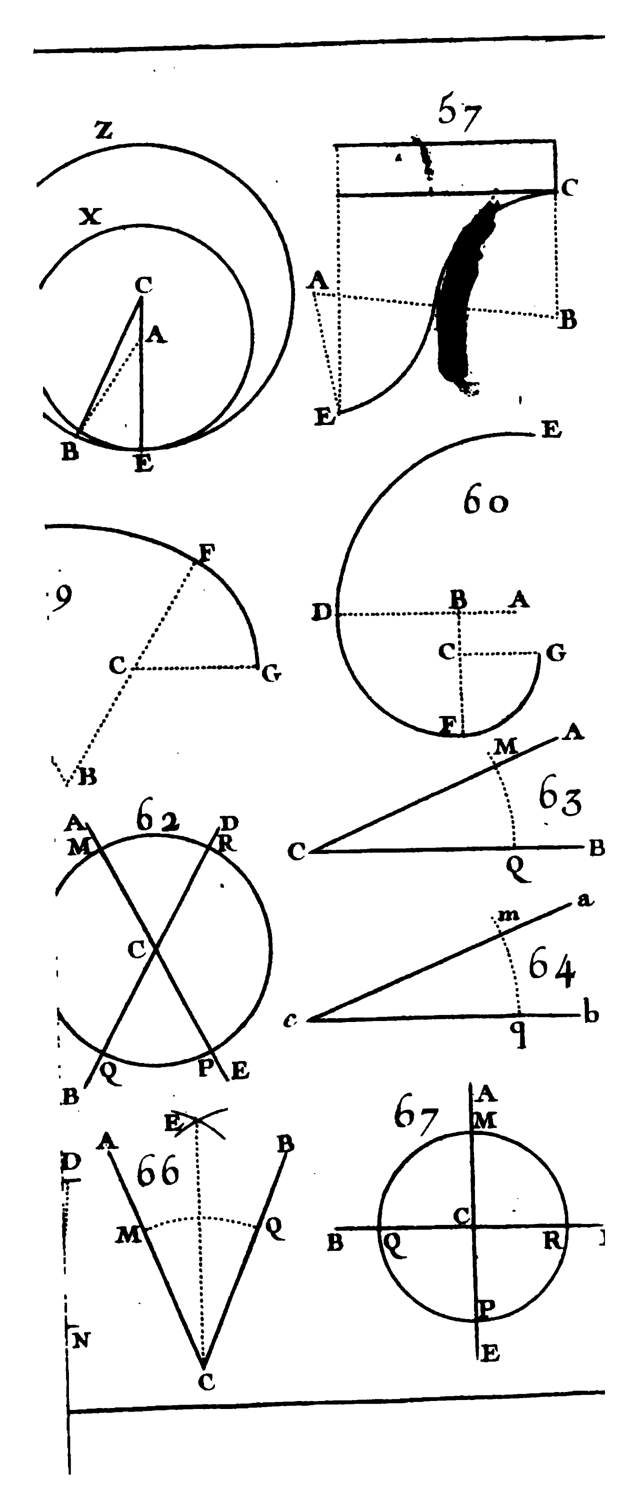


3
B
E
D
4
A
C
B
A
D
E
C
B
H
C
D
F
G
7
6
E
h
B
A
C
F
11
D
E
d
e
12
10
A
B
b
D
G
D
D
15
16
C
C
F
B
G
F
B
G
A
D
C
A
A
D
21
20
19
C
D
C
E
F
B
G
E
H
E
B
B

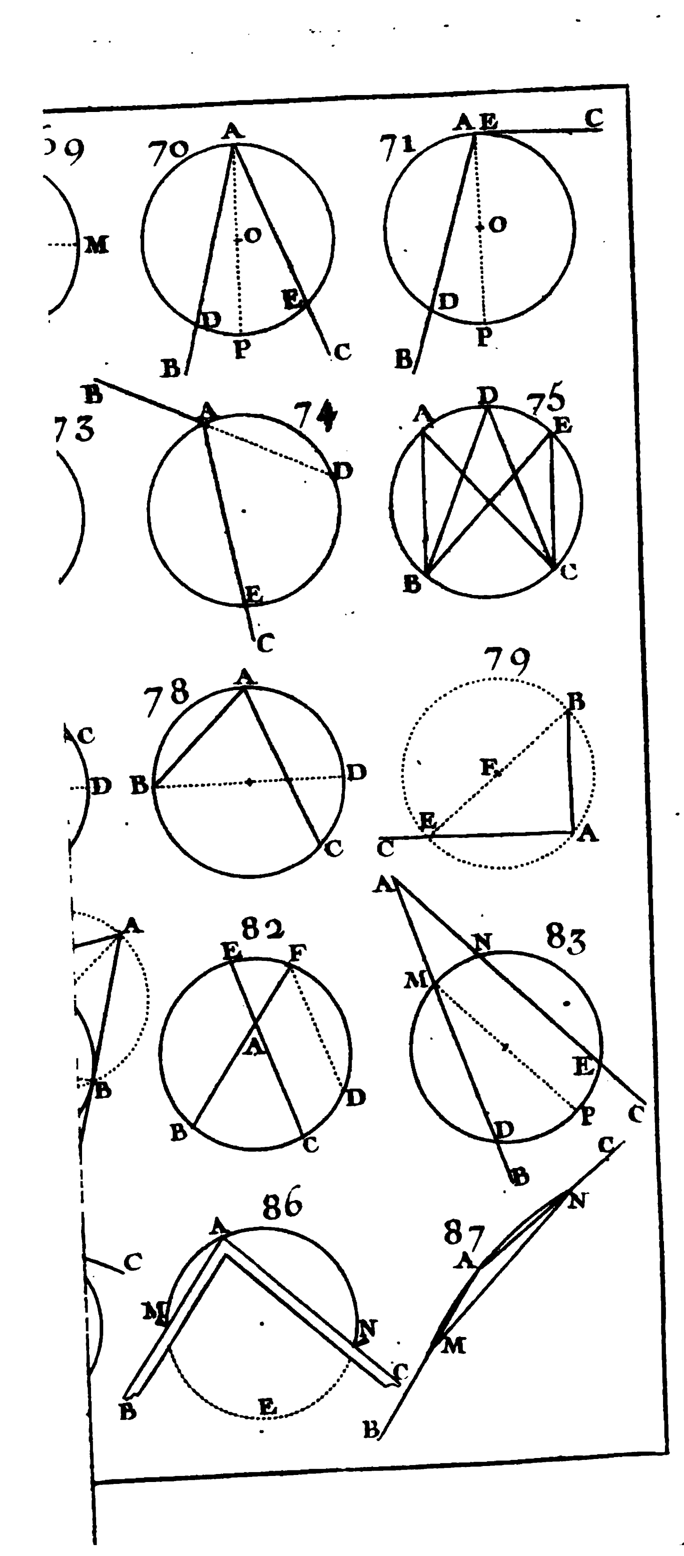


24
A
C
F
B
G
K
D
27
A
B
D
F
G
D
E
28
A
F
G
B D
E
30
A
F
D
B
G
H
31
A
C
F
B
D
G
33
A
C
E
I
G
D
34
A
C
F
E
I
G
B
D


37
O
M
A
B
C
D
N
P
38
N
M
A
C
O
E
D
B
41
M
A
C
G
D
B
42
A
C
G
D
B
45
F
B
D
A
C
E
46
A
H
E
C
D
B
G
49
C
F
D
E
G
50
A
C
B
F
G
E
53
C
A
B
F
E
G
54
B
E
C
G
A
F
D



57
Z
X
C
A
B
E
C
A
B
E
E
60
9
F
C
G
B
D
B
A
C
G
F
M
A
63
C
B
Q
62
A
M
D
R
C
B
Q
P
E
a
m
64
c
b
q
E
A
B
66
D
M
Q
N
C
67
A
M
C
B
Q
R
P
E



69
M
70
A
O
D
E
P
B
C
71
A E
C
O
D
P
B
B
73
A
74
D
E
C
D
75
A
E
B
C
C
D
D
78
A
B
D
C
79
B
F
E
A
C
A
A
B
82
E
F
A
D
B
C
N
83
M
E
P
C
D
B
C
N
86
A
C
M
N
C
B
E
87
A
M
B



ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.

LIVRE II.

Des Superficies & de leurs Figures.



N a défini la Superficie une Étendue en longueur & largeur sans épaisseur.

On distingue deux sortes de Superficies; savoir, la Superficie plane, qu'on appelle simplement Plan, & la Superficie courbe.

DÉFINITIONS.

101 Nous avons déjà dit (*N*°. 8.) qu'une Superficie à laquelle on peut appliquer une Ligne droite en tous sens se nomme *Superficie plane* ou *Plan;* & qu'on entend par une Droite appliquée à une Superficie, une Ligne droite qui se confond avec la Superficie, de maniere qu'il n'y a point d'espace entr'elle & la Superficie. Nous avons dit aussi (*N*°. 8.) qu'une Superficie à laquelle on ne peut pas appliquer une Ligne droite en tous sens s'appelle *Superficie courbe*.

On distingue les Plans par la nature des Lignes qui les renferment.

Les Plans qui sont renfermés par des Lignes droites se nomment *Plans rectilignes ;* les Plans qui sont renfermés par des Lignes courbes s'appellent *Plans curvilignes ;* & ceux qui sont renfermés par des Lignes droites & par des Lignes courbes s'appellent *Plans mixtilignes.*

Comme ces trois espéces de Plans ont autant d'Angles que de côtés, on distingue encore ceux de chaque espéce, par le nombre de leurs Angles ou par le nombre de leurs côtés ; c'est-à-dire, que chaque Figure est désignée par un nom, qui marque en même temps la nature de ses côtés, & le nombre de ses Angles ou de ses côtés.

Cependant les Figures rectilignes étant celles que l'on considere le plus particulièrement, on se contente de leur donner des noms qui désignent seulement le nombre de leurs Angles ou de leurs côtés.

Un Plan renfermé par trois Lignes droites devroit se nommer *Triangle rectiligne ;* mais on l'appelle simplement *Triangle.* On le nomme quelquefois *Trigone*, & l'on pourroit l'appeler *Trilatere.*

Lorsque le Plan est renfermé par quatre Lignes droites, on le nomme *Quadrilatere.*

Si cinq Lignes droites le renferment, on le nomme	*Pentagone.*
Si six Lignes droites le renferment,	*Exagone.*
Si sept Lignes droites le renferment,	*Eptagone.*
Si huit Lignes droites,	*Octogone.*
Si neuf,	*Ennéagone.*
Si dix,	*Décagone.*
Si onze ;	*Endécagone.*
Si douze ;	*Dodécagone.*

Enfin lorsqu'un Plan est renfermé par une quan-

tité de Lignes droites dont on ne veut pas fixer le nombre, on le nomme *Multilatere* ou *Polygone*.

Lorſque les Lignes qui renferment un Plan ſont toutes courbes, on ajoûte le mot *curviligne* au nom qui déſigne le nombre de ſes Angles ou de ſes côtés. Par exemple, un Plan renfermé par trois Lignes courbes, s'appelle *Triangle curviligne*. Lorſque parmi les côtés du Plan il y a des Lignes droites & des Lignes courbes, on ajoûte le mot *mixtiligne* au nom qui marque le nombre de ſes Angles ou de ſes cotés. Ainſi un Plan qui ſeroit renfermé par quatre Lignes, dont une ou deux ou trois ſeulement ſeroient courbes, s'appelleroit *Quadrilatere mixtiligne*.

Quoiqu'il y ait une infinité de Plans renfermés par différentes Lignes, on ne conſidere dans ce Livre ſecond que les Plans rectilignes : & lorſqu'on y parlera des Cercles qui ſont des Plans curvilignes, ou de leurs Segmens & Secteurs qui ſont des Plans mixtilignes, on les regardera comme des Polygones, ou comme des portions de Polygones d'une infinité de côtés.

Comme les Triangles ſont les Plans renfermés par le plus petit nombre de Lignes droites, & ſont par conſéquent les Plans les plus ſimples, l'ordre demande qu'en parlant des Plans, on commence par les Triangles.

CHAPITRE PREMIER.

Des Triangles.

Définitions.

102 Un Triangle eſt un Plan renfermé par trois Lignes droites.

Fig. 90. Une Perpendiculaire *AD*, menée d'un Angle *A* d'un Triangle ſur le côté *BC* oppoſé à cet Angle, ſe nomme *Hauteur* de ce Triangle; & le côté *BC*, ſur lequel on a abaiſſé la Perpendiculaire *AD*, s'appelle *Baſe* de ce même Triangle *ABC*.

Fig. 91. Dans un Triangle, le côté oppoſé à un Angle s'appelle *Baſe* de cet Angle. Ainſi *MP* eſt la Baſe de l'Angle *O*; *OP* eſt la Baſe de l'Angle *M*.

En conſidérant un Triangle par rapport à ſes côtés, on en diſtingue de trois ſortes; ſavoir, le *Triangle Équilatéral*, le *Triangle Iſoſcele*, & le *Triangle Scalene*.

Le *Triangle Équilatéral* eſt celui dont les trois côtés ſont égaux.

Le *Triangle Iſoſcele* eſt celui qui a ſeulement deux côtés égaux.

Le *Triangle Scalene* eſt celui dont tous les côtés ſont inégaux.

En conſidérant un Triangle par rapport à ſes Angles, on en diſtingue auſſi de trois eſpéces; le *Triangle Rectangle*, le *Triangle Obtuſangle*, & le *Triangle Acutangle*.

Le *Triangle Rectangle*, qu'on nomme auſſi *Triangle Orthogone*, eſt celui qui a un Angle droit.

Le *Triangle Obtuſangle*, qu'on nomme auſſi *Triangle Amblygone*, eſt celui qui a un Angle obtus.

Le *Triangle Acutangle*, qu'on nomme auſſi *Triangle Oxygone*, eſt celui qui a tous les Angles aigus.

THÉORÊME.

103 *La somme des trois Angles d'un Triangle quelconque* ABC, *est égale à deux Angles droits.* Fig. 88.

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle *ABC*, c'est-à-dire, qu'on fasse passer un Cercle par les Sommets des trois Angles *A*, *B*, *C*, de ce Triangle (*N*°. 56.). Chaque Angle aura le Sommet à la Circonférence, & aura par conséquent pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (*N*°. 88.). Mais les trois Angles *A*, *B*, *C*, du Triangle, comprennent toute la Circonférence entre leurs côtés.

Donc ces Angles ont ensemble pour mesure la moitié de la Circonférence, & valent par conséquent ensemble deux Angles droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit pû, sans le secours de la mesure des Angles par le Cercle, démontrer que les trois Angles d'un Triangle ABC *valent deux droits, en se servant seulement des propriétés des Paralléles. Car si l'on prolonge un côté* BC *en* O, *& qu'on mene* CD *paralléle à* AB, *les Angles alternes internes* A, ACD, *seront égaux; & les internes externes du même côté*, B, DCO, *seront aussi égaux. Ainsi les trois Angles du Triangle* ABC *seront égaux aux trois Angles* ACB, ACD, DCO, *qui valent deux droits* (N°. 26.). Fig. 89.

COROLLAIRE I.

104 Donc la somme des trois Angles *A*, *B*, *C*, d'un Triangle, est égale à la somme des trois Angles *M*, *O*, *P*, d'un autre Triangle; puisque chacune de ces sommes vaut deux droits (*N*°. 103.). Fig. 90 & 91.

COROLLAIRE II.

Fig. 90 & 91. 105 Donc si deux Angles A, B, d'un Triangle, sont égaux à deux Angles M, O, d'un autre Triangle, chacun à chacun ou pris ensemble, le troisiéme Angle C du premier Triangle sera égal au troisiéme Angle P du second Triangle.

Car les Angles $A+B+C=M+O+P$ (*N°*. 104.). Mais (*hyp.*) $A+B=M+O$. Donc (en retranchant la seconde Égalité de la premiere) on aura l'*Angle* C = l'*Angle* P.

COROLLAIRE III.

106 Donc si un Triangle a un Angle droit, les deux autres ne vaudront ensemble qu'un Angle droit; & chacun de ces deux Angles sera par conséquent aigu.

COROLLAIRE IV.

107 Donc si un Triangle a un Angle obtus, les deux autres seront ensemble moindre qu'un droit; & chacun d'eux sera par conséquent aigu.

COROLLAIRE V.

108 Donc 1°. un Triangle ne peut avoir qu'un Angle droit.

2°. Il ne peut avoir qu'un Angle obtus.

3°. Il peut avoir tous ses Angles aigus.

4°. Il ne peut pas avoir un Angle droit avec un obtus.

THÉORÉME.

Fig. 92. 109 *Si l'on prolonge un côté quelconque* BC *d'un Triangle* ABC, *l'Angle extérieur* ACO *vaudra lui seul autant que les deux intérieurs opposés* A, B.

DÉMONSTRATION.

Soit circonſcrit un Cercle au Triangle *ABC*. L'Angle extérieur *ACO* aura pour meſure $\frac{BYC}{2} + \frac{AZC}{2}$ (*N*°. 89.). Mais l'Angle *A* a pour meſure $\frac{BYC}{2}$, & l'Angle *B* a pour meſure $\frac{AZC}{2}$ (*N*°. 88.). Donc la meſure de l'Angle extérieur *ACO* eſt égale à la ſomme des meſures des deux intérieurs oppoſés *A*, *B*; & par conſéquent l'Angle *ACO* eſt égal à la ſomme des deux Angles *A* & *B*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit pû démontrer par les propriétés des Parallèles, que l'Angle extérieur ACO *eſt égal à la ſomme des deux intérieurs oppoſés* A & B. *Car ſi l'on prolonge le côté* BC *en* O, & *qu'on tire* CD *parallèle à* BA, *les Angles alternes internes* BAC, ACD, *ſeront égaux ;* & *les internes externes du même côté*, B, DCO, *ſeront auſſi égaux* (N°. 50.). *Ainſi l'Angle extérieur* ACO *ou* ACD + DCO *ſera égal à la ſomme des deux intérieurs oppoſés* A & B. Fig. 89.

COROLLAIRE.

110 Donc l'Angle extérieur *ACO* eſt plus grand qu'aucun des intérieurs oppoſés *A*, *B*.

Nous aurions pû réſerver la meſure des Angles qui ont le Sommet entre le Centre & *la Circonférence*, & *celle des Angles qui ont le Sommet au dehors du Cercle, pour en faire des Corollaires de ce Théorême ;* & *nous aurions pû démontrer que*

1°. *Un Angle* BAC, *qui a le Sommet entre le Centre* & *la Circonférence, a pour meſure la moitié de l'Arc* BC *compris entre ſes côtés, plus la moitié de l'Arc* FE *compris entre les côtés de ſon oppoſé au Sommet.* Fig. 93.

Car en tirant la Corde BF, *l'Angle* BAC *qui ſera extérieur au Triangle* ABF *ſera égal à la ſomme des deux Angles intérieurs* F, B, & *aura par conſéquent pour me-*

sure la somme des mesures de ces deux Angles, c'est-à-dire $\frac{BC}{2} + \frac{FE}{2}$ (No. 88.).

Fig. 94. 2°. *Un Angle qui a le Sommet au dehors du Cercle, a pour mesure la moitié de l'Arc concave* B C *compris entre ses côtés, moins la moitié de l'Arc convexe* D E *aussi compris entre ses côtés.*

Car si l'on tire la Corde B E, *l'Angle* B E C *sera extérieur au Triangle* A B E. *Ainsi l'on aura les Angles* A + B = B E C, *& par conséquent l'Angle* A = BEC − B. *Mais* (No. 88.) *l'Angle* B E C *a pour mesure* $\frac{BC}{2}$; *& l'Angle* B *a pour mesure* $\frac{DE}{2}$. *Donc l'Angle* A *ou* B E C − B *a pour mesure* $\frac{BC}{2} - \frac{DE}{2}$.

THÉORÈME.

Fig. 88. 111 *Dans un même Triangle* A B C,

1°. *Les côtés opposés aux Angles égaux sont égaux.*

2°. *Et réciproquement les Angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle *A B C* (*No.* 56.).

1°. Si l'Angle *B* = *C*, on aura l'Arc *AZC* = *AXB* (*N°.* 90.), & par conséquent la Corde ou côté *A C* = *A B* (*No.* 60.). *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. Si le côté *A B* = *A C*, on aura l'Arc *A X B* = *A Z C* (*N°.* 60.), & par conséquent l'Angle *C* = *B* (*N°.* 90.). *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

112 Donc un Triangle qui aura les trois Angles égaux, aura aussi les trois côtés égaux (*N°.* 111.), & sera par conséquent équilatéral (*No.* 102.).

Et réciproquement, un Triangle équilatéral aura les trois Angles égaux.

COROLLAIRE II.

113 Donc un Triangle qui a deux Angles égaux est isoscele, c'est-à-dire, qu'il a deux côtés égaux.

Et réciproquement un Triangle isoscele a deux Angles égaux.

THÉORÊME.

114 *Dans un même Triangle* A B C, Fig. 95.

1°. Le plus grand côté est opposé au plus grand Angle.

2°. Et réciproquement le plus grand Angle est opposé au plus grand côté.

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle *A B C* (*N°.* 56.).

1°. Si l'Angle $C > B$, on aura l'Arc $AXB > AZC$ (*N°.* 90.), & par conséquent le côté ou la Corde $AB > AC$ (*N°.* 60.). *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. Si le côté ou la Corde $AB > AC$, on aura l'Arc $AXB > AZC$ (*N°.* 60.), & par conséquent l'Angle $C > B$ (*N°.* 90.). *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE.

115 Donc un Triangle qui a tous les Angles inégaux est scalene, c'est-à-dire, qu'il a tous les côtés inégaux.

Et réciproquement, un Triangle scalene ou qui a tous les côtés inégaux, a aussi tous les Angles inégaux.

THÉORÉME.

Fig. 100 & 101. 116 *Deux Triangles* ACB, MOP, *sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont un Angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; c'est-à-dire, si* l'Angle *C* = l'Angle *O*, *si* AC = MO, *& si* BC = PO.

DÉMONSTRATION.

Soit appliqué le Sommet *C* de l'Angle *ACB* sur le Sommet *O* de l'Angle égal *MOP*, de maniere que le côté *AC* se confonde avec le côté *MO* qui lui est égal. Il est clair (*N*°. 16.) que le côté *BC* se couchera sur le côté *PO*, & que le Point *B* tombera en *P*; puisqu'on suppose *BC* = *PO*. Le troisiéme côté *AB* du premier Triangle se confondra donc avec le troisiéme côté *MP* du second; en sorte que les deux Triangles *ACB*, *MOP*, ne feront qu'un seul & même Triangle, & seront par conséquent égaux en toutes choses. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÉME.

Fig. 96 & 97. 117 *Si deux Angles inégaux* BCA, BCD, *sont compris entre côtés égaux chacun à chacun, le côté* BA *opposé au plus grand Angle* BCA *sera plus grand que le côté* BD *opposé au plus petit Angle* BCD.

Et réciproquement

Si les Bases BA, BD, *de deux Angles* BCA, BCD, *compris entre côtés égaux chacun à chacun, sont inégales, l'Angle* BCA *opposé à la plus grande Base* BA *sera plus grand que l'Angle* BCD *opposé à la plus petite Base* BD.

DÉMONSTRATION.

Ayant appliqué le Sommet *C* de l'Angle *BCA*

ſur le Sommet *C* de l'Angle *BCD*, en ſorte que le côté *B C* du premier ſe confonde avec le côté égal *B C* du ſecond, du Point *C* comme Centre on décrira par le Point *A* une Circonférence qui paſſera par le Point *D*; puiſqu'on ſuppoſe *C A* = *C D*. Enfin l'on prolongera le côté *B C* juſqu'à ce qu'il rencontre la Circonférence en *E*. Cela poſé,

1°. Si l'Angle *B C A* eſt plus grand que l'Angle *B C D*, l'Arc *OA* qui ſert de meſure à l'Angle *B C A* ſera plus grand que l'Arc *O D* qui ſert de meſure à l'Angle *B C D*. Ainſi le Point *A* ſera plus près que le Point *D* de l'extrémité *E* de la Droite *A E* qui paſſe par le Centre : d'où il ſuit (*N*°. 57.) qu'on aura *B A* > *B D*. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. Et réciproquement, ſi la Baſe *B A* oppoſée à l'Angle *B C A* eſt plus grande que la Baſe *B D* oppoſée à l'Angle *B C D*, le Point *A* ſera plus proche que le Point *D* du bout *E* de la Droite *B E* qui paſſe par le Centre (*N*°. 57.); c'eſt-à-dire, qu'on aura *l'Arc* EA < *l'Arc* ED. Ainſi l'Arc *OA* qui ſert de meſure à l'Angle *BCA* ſera plus grand que l'Arc *O D* qui ſert de meſure à l'Angle *B C D* : & par conſéquent on aura *l'Angle* BCA > *l'Angle* BCD. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

THÉORÉME.

118 *Si les trois côtés* BC, CA, BA, *d'un Triangle* BCA, *ſont égaux aux trois côtés* BC, CD, BD, *d'un autre Triangle* BCD, *chacun à chacun, les deux Triangles* BCA, BCD, *ſeront parfaitement égaux.* Fig. 98 & 99.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que les deux Triangles propoſés *BCA*, *BCD*, ſont parfaitement égaux, il ſuffit

(*No*. 116.) de faire voir que les deux Angles *BCA*; *BCD*, dont on ſuppoſe les côtés égaux chacun à chacun, ſont égaux. Or ces deux Angles ſont égaux. Car s'ils n'étoient pas égaux, les côtés *BA*, *BD*, oppoſés à ces deux Angles, ne ſeroient pas égaux (*No*. 117.) : ce qui ſeroit contre l'hypothèſe ; puiſqu'on ſuppoſe les trois côtés *BC*, *CA*, *BA*, du premier Triangle, égaux aux trois côtés *BC*, *CD*, *BD*, du ſecond, chacun à chacun.

Donc deux Triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun ſont parfaitement égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÈME.

Fig. 100 & 101. **119** *Deux Triangles* ABC, MPO, *ſont parfaitement égaux, lorſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun ; c'eſt-à-dire, ſi* AB = MP, *ſi* l'Angle *A* = l'Angle *M*, *& ſi* l'Angle *B* = l'Angle *P*.

DÉMONSTRATION.

Soit appliqué le côté *MP* ſur le côté *AB*. Comme ils ſont égaux, les Points *M* & *P* tomberont ſur les Points *A* & *B*. Mais comme l'Angle *A* = *M*, le côté *MO* tombera ſur *AC*; & comme l'Angle *P* = *B*, le côté *PO* tombera ſur *BC* (*No*. 16.). Ainſi les trois côtés du Triangle *MPO* tomberont ſur les trois côtés du Triangle *ABC*. Donc ces deux Triangles ſe confondront, & ſeront par conſéquent égaux en toutes choſes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Fig. 100 & 101. **120** Nous venons de voir (*No*. 116. 118. 119.) les trois caractères principaux auſquels on reconnoît que deux Triangles ſont parfaitement égaux. Ces trois caractères

caracteres d'égalité parfaite étant d'un grand usage dans la Géométrie, il est à propos d'en faire ici la récapitulation.

1°. Deux Triangles *ACB*, *MOP*, sont parfaitement égaux, quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, lorsque $AC=MO$, $AB=MP$, $CB=OP$ (N°. 118.).

2°. Deux Triangles *ABC*, *MOP*, seront parfaitement égaux, s'ils ont un Angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, si l'Angle $C=O$, si $AC=MO$, & si $CB=OP$ (*N*°. 116.).

3°. Deux Triangles *ACB*, *MOP*, seront parfaitement égaux, s'ils ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, si $AB=MP$, & si les Angles *A*, *B*, sont égaux aux Angles *M*, *P* (*N*°. 119.).

De ces trois caracteres ausquels on reconnoît que deux Triangles sont parfaitement égaux, on tire trois manieres de faire un Triangle MOP *égal à un autre Triangle donné* ACB.

1°. *Ayant fait une Droite* MP *égale à un côté* AB *du Triangle* ACB, *du Point* M *comme Centre, & d'un Rayon égal à* AC, *on décrira un Arc* EOF; *& du Point* P *comme Centre, & d'un Rayon égal à* BC, *on décrira un Arc* GOH *qui coupera le premier Arc en* O. *Puis on ménera les Droites* OM, OP, *qui feront avec* MP *un Triangle* MOP *égal au Triangle* ACB, *puisque leurs trois côtés seront égaux chacun à chacun.* Fig. 100 & 101.

2°. *On fera* (N°. 82.) *un Angle* MOP *égal à un Angle* ACB *du Triangle donné. Puis ayant fait* MO=AC, OP=CB, *on ménera la Droite* MP *qui fera avec les deux Lignes* MO, OP, *un Triangle* MOP *égal au Triangle donné* ACB; *puisque ces deux Triangles auront un Angle égal entre côtés égaux chacun à chacun.*

3°. *Ayant fait* MP=AB, *on ménera les deux Droites* MO, PO (N°. 82.), *qui feront avec* MP *deux Angles* M, P, *égaux aux deux Angles* A, B, *du Triangle* ACB; *& ces deux Lignes feront avec* MP *un Triangle* MOP *égal au Triangle* ACB, *puisqu'ils auront un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun.*

REMARQUES.

121 Il est bon de remarquer ici que si deux Triangles ont quelqu'un de ces trois caracteres ausquels on reconnoît leur égalité parfaite, les Angles égaux sont opposés aux côtés égaux, & que les côtés égaux sont opposés aux Angles égaux.

Il faut encore remarquer que pour mieux distinguer les parties correspondantes de deux Triangles parfaitement égaux, il est à propos de les nommer & de les écrire de maniere que les Angles égaux correspondans tiennent le même lieu dans la nomination. Par exemple, si l'on reconnoît que l'Angle *A* = *M* & que l'Angle *B* = *P*, on désignera les deux Triangles où sont ces Angles par *ACB*, *MOP*, ou par *ABC*, *MPO*, ou par *CAB*, *OMP*, &c.

Lorsque les Triangles sont ainsi nommés, c'est-à-dire, lorsque les Angles égaux tiennent le même lieu, les côtés égaux correspondans tiennent aussi le même lieu; & par conséquent il est aisé de les reconnoître dans la nomination.

THÉORÊME.

122 1°. *La somme des Angles intérieurs d'un Polygone quelconque vaut autant de fois deux Angles droits moins quatre droits, que le Polygone a de côtés.*

2°. *La somme des Angles extérieurs d'un Polygone vaut toûjours quatre Angles droits.*

DÉMONSTRATION.

1°. D'un Point quelconque *F* pris dans le Polygone, soient tirées des Droites à tous les Angles : on aura autant de Triangles que le Polygone a de côtés. Ainsi la somme des Angles de tous ces Triangles vaudra autant de fois deux Angles droits (*N°*. 103.) que le Polygone a de côtés. Mais la somme des Angles du Polygone est plus petite que la somme des Angles de tous les Triangles, de la valeur des Angles qui sont autour du Point *F*, lesquels valent ensemble quatre droits (*N°*. 26.). Donc la somme des Angles intérieurs d'un Polygone vaut autant de fois deux Angles droits moins quatre droits, que le Polygone a de côtés. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.* Fig. 102.

2°. Chaque Angle intérieur *ABC* avec son extérieur *CBE* vaut deux Angles droits (*N°*. 21.). Ainsi la somme des intérieurs & des extérieurs vaut autant de fois deux droits que le Polygone a de côtés. Mais cette somme d'Angles droits surpasse de quatre droits les Angles intérieurs (*Part. 1re.*). Donc la somme des Angles extérieurs vaut toûjours quatre droits. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE.

123 Donc les quatre Angles d'un Quadrilatere valent ensemble quatre droits. Ainsi lorsque les quatre Angles d'un Quadrilatere seront égaux, chacun d'eux sera droit.



CHAPITRE II.

Des Parallélogrammes.

DÉFINITIONS.

Fig. 103, 104, 105, 106 & 107. 124 UN Quadrilatere *ABCD* qui a les côtés opposés paralléles, savoir, *AB* paralléle à *DC* & *AD* paralléle à *BC*, se nomme *Parallélogramme*; & celui qui n'a pas les côtés opposés paralléles, se nomme *Trapèze*.

Fig. 104. Un Parallélogramme qui a tous les Angles égaux, & par conséquent droits (*N*°. 123.), se nomme *Rectangle*; & celui qui n'a pas tous les Angles égaux,

Fig. 103. se nomme *Rhomboïde*.

Fig. 105. Un Rectangle qui a tous les côtés égaux, se nomme *Quarré*; & celui qui n'a pas tous les côtés égaux,

Fig. 104. se nomme simplement *Rectangle* ou *Quarré long*.

Fig. 106. Un Rhomboïde qui a tous les côtés égaux, se nomme *Rhombe* ou *Lozange*.

Fig. 107. Une Droite *AC* tirée par les Angles opposés d'un Parallélogramme, se nomme *Diagonale*.

Fig. 103. Une Droite *AE* ou *BF* tirée d'un côté *AB* perpendiculairement sur le côté opposé *DC* prolongé s'il est nécessaire, se nomme *Hauteur* du Parallélogramme.

On nomme un Parallélogramme par les quatre lettres qui sont à ses quatre Angles; mais le plus souvent pour abréger la nomination, on le désigne par les deux lettres placées aux deux Angles opposés, quand il n'y a point de Diagonale tirée par ces

Fig. 107. deux Angles. Ainsi le Parallélogramme *ABCD*, qui aura une Diagonale *AC*, sera nommé *BD* & non pas *AC*, pour ne pas confondre ce Parallélogramme avec sa Diagonale *AC*.

THÉORÈME.

125 *Lorsqu'un Quadrilatere* ABCD *a deux côtés* AB, DC, *égaux & paralléles, les deux autres côtés* AD, BC, *sont aussi égaux & paralléles.* Fig. 107

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la Diagonale *AC*. Les Droites *AB*; *DC*, étant paralléles, les Angles *BAC*, *DCA*, seront égaux (*N°*. 50.). Mais ces Angles égaux seront compris entre des côtés égaux chacun à chacun; puisqu'on suppose $AB = DC$, & que *AC* est commun à l'un & à l'autre. Donc (*N°*. 116.) les deux Triangles *BAC*, *DCA*, seront parfaitement égaux, & auront par conséquent les côtés & les Angles égaux.

On aura donc 1°. $BC = AD$; 2°. l'Angle $ACB = CAD$; & par conséquent les Droites *BC*, *AD*, seront paralléles (*N°*. 51.).

Donc si un Quadrilatere a deux côtés opposés *AB*, *DC*, égaux & paralléles, ses deux autres côtés *AD*, *BC*, seront aussi égaux & paralléles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

126 Puisqu'un Quadrilatere qui a deux côtés égaux & paralléles a les deux autres côtés égaux & paralléles (*N°*. 125.), ce Quadrilatere est un Parallélogramme (*N°*. 124.).

COROLLAIRE II.

127 Deux Perpendiculaires *AD*, *BC*, à une même Droite *EH*, sont paralléles entr'elles (*N°*. 48.). Ainsi lorsque deux Perpendiculaires *AD*, *BC*, à une même Droite *EH*, seront égales, les Droites *AB*, Fig. 108.

E H, entre lesquelles elles seront comprises, seront paralléles.

COROLLAIRE III.

Fig. 109 & 110. 128 Donc si plusieurs Triangles ou Parallélogrammes *EAF*, *GBH*, placés sur une même Droite *E H*, & du même côté de cette Ligne, ont des hauteurs égales *AD*, *BC*, les Droites *AB*, *EH*, qui les comprendront, seront paralléles. Car les hauteurs *A D*, *B C*, de ces figures, seront des Perpendiculaires égales tirées sur une même Droite *E H*. Ainsi (*N*°. 127.) les Droites *A B*, *E H*, qui les comprendront, seront paralléles : & comme les deux Plans *E A F*, *G B H*, seront contenus entre les mêmes Lignes que leurs hauteurs, il est clair que ces Plans seront compris entre deux Paralléles.

THÉORÉME.

129 *Un Quadrilatere* ABCD *qui a les côtés opposés paralléles, & qui est par conséquent un Parallélogramme, a les côtés opposés égaux.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 107. Soit tirée la Diagonale *A C*. On aura deux Triangles *BAC*, *DCA*, qui auront un côté commun *AC* adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun.

Car *A B* & *CD* étant paralléles, les deux Angles *BAC*, *DCA*, seront égaux (*N*°. 50.) ; & *BC*, *DA*, étant aussi paralléles, les Angles *BCA*, *DAC*, seront aussi égaux (*N*°. 50.).

Donc (*N*°. 119.) les deux Triangles *BAC*, *DCA*, seront parfaitement égaux, & donneront par conséquent $AB = CD$, $BC = DA$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

130 Donc un Parallélogramme *ABCD* est divisé par sa Diagonale *AC* en deux Triangles *BAC*, *DCA*, parfaitement égaux. Ainsi un Triangle *DCA* est la moitié d'un Parallélogramme *ABCD* qui a même base & même hauteur que lui. Fig. 107.

COROLLAIRE II.

131 Donc deux Paralléles *AB*, *EH*, sont partout également distantes l'une de l'autre ; c'est-à-dire, que tous les Points de la Droite *AB* sont à la même distance de sa paralléle *EH*. Fig. 108.

Car si de deux Points quelconques de la Droite *AB*, l'on mene deux Perpendiculaires *AD*, *BC*, à sa paralléle *EH*, ces deux Perpendiculaires seront paralléles (*N*°. 48.) ; & le Quadrilatere *ABCD* sera un Parallélogramme dont les côtés opposés *AD*, *BC*, seront égaux (*N*°. 129.).

Mais ces Perpendiculaires égales *AD*, *BC*, seront les Distances des deux Points *A*, *B*, à la Droite *EH*.

Donc deux Points quelconques de la Droite *AB*, sont à la même distance de sa paralléle *EH*; & par conséquent deux Paralléles sont partout également distantes l'une de l'autre.

THÉORÊME.

132 *Un Quadrilatere* ABCD *qui a ses côtés opposés égaux, a aussi ses côtés opposés paralléles, & est par conséquent un Parallélogramme.* Fig. 107.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la Diagonale *AC*. On fera deux Trian-

gles *B A C*, *D C A*, qui auront les trois côtés égaux chacun à chacun.

Car le côté *A C* sera commun à ces deux Triangles; & l'on suppose que les côtés opposés du Quadrilatere *A B C D* sont égaux, c'est-à-dire, que *A B* = *CD* & *B C* = *D A*. Ainsi les deux Triangles *B A C*, *D C A*, seront parfaitement égaux (*N*°. 118.). D'où il suit que

1°. Les Angles *B A C*, *D C A*, de ces Triangles, seront égaux; & les Lignes *A B*, *D C*, seront par conséquent paralléles (*N*°. 51.).

2°. Les Angles *B C A*, *D A C*, de ces mêmes Triangles, seront aussi égaux; & les Lignes *B C*, *A D*, seront par conséquent paralléles (*N*°. 51.).

Donc un Quadrilatere qui aura les côtés opposés égaux, aura nécessairement les côtés opposés paralléles, c'est-à-dire (*N*°. 124.), qu'il sera un Parallélogramme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÊME.

Fig. 111 & 112. 133 *Deux Parallélogrammes* ABCD, MBCN, *sont égaux, lorsqu'ils ont même base* BC, *& qu'ils sont compris entre les mêmes Paralléles* AN, BZ.

DÉMONSTRATION.

Les Triangles *ABM*, *DCN*, ont les côtés égaux chacun à chacun.

1°. *AB* = *DC* (*N*°. 129.); parce que ce sont les côtés opposés d'un même Parallélogramme *A B C D*.

2°. *B M* = *CN* (*N*°. 129.); puisque ce sont les côtés opposés d'un même Parallélogramme *MBCN*.

3°. Par la même raison *A D* = *B C*, & *B C* = *MN*. Ainsi *AD* = *MN*. Ajoûtant *MD* aux deux membres de cette Égalité (*Fig.* 112.), ou (*Fig.* 111.)

retranchant *MD* de ſes deux membres, on aura *AM* = *DN*.

Donc les deux Triangles *ABM*, *DCN*, ſeront parfaitement égaux (*N*°. 118.).

Ajoûtant à ces deux Triangles le même Trapèze *MBCD*. il en réſultera le Parallélogramme *ABCD* égal au Parallélogramme *MBCN*. Fig. 111.

Ou bien retranchant de ces deux Triangles égaux le même Triangle *DOM*, il reſtera deux Trapèzes égaux *ABOD*, *MOCN*; & ajoûtant à ces deux Trapèzes égaux le même Triangle *BOC*, on aura deux Parallélogrammes égaux *ABCD*, *MBCN*. Fig. 112.

Donc dans les deux Figures 111, 112, les Parallélogrammes *ABCD*. *MBCN*. qui ont même baſe *BC*, & qui ſont compris entre mêmes Paralléles *AN*, *BZ*, ſont égaux.

COROLLAIRE I.

134 Donc deux Parallélogrammes ſont égaux, quand ils ont baſes égales & hauteurs égales. Car ayant baſes égales, on peut les mettre ſur une même baſe, & ayant hauteurs égales, ils peuvent être entre les mêmes Paralléles. (*N*°. 128.).

COROLLAIRE II.

135 Donc deux Parallélogrammes *ABCD*. *OBCP*, ne ſont pas égaux, quand ils ont même baſe *BC*. & qu'ils ne ſont pas compris entre les mêmes Paralléles *AN*. *BZ*. Car *ABCD* = *MBCN*. (*N*°. 133.). Mais *MBCN* > ou < *OBCP*. Donc *ABCD* > ou < *OBCP*. Fig. 113.

COROLLAIRE III.

136 Donc deux Parallélogrammes *ABCD*, *MBCN*, ſont compris entre les mêmes Paralléles Fig. 111 & 112.

AN, *BZ*, quand ils ſont égaux & qu'ils ont même baſe. Car ayant même baſe, ils ne ſeroient pas égaux, s'ils n'étoient pas compris entre les mêmes Parallé-les (*N*°. 135.).

COROLLAIRE IV.

Fig. 114. 137 Donc deux Triangles *BAC*, *BMC*, ſont égaux, quand ils ont même baſe *BC* & qu'ils ſont compris entre les mêmes Paralléles *AN*, *BZ*. Car ſi l'on tire *CD* paralléle à *BA*, & *CN* paralléle à *BM*, on aura le Parallélogramme *ABCD* = *MBCN* (*N*°. 133.) : & comme les Triangles *BAC*, *BMC*, ſont les moitiés de ces Parallélogrammes (*N*°. 130.), ils ſont égaux.

COROLLAIRE V.

Fig. 115. 138 Donc les Triangles *BAC*, *BOC*, ne ſont pas égaux, quand ils ont même baſe *BC*, & qu'ils ne ſont pas compris entre les mêmes Paralléles *AN*, *BZ*. Car le Triangle *BAC* = *BMC* (*N*°. 137.). Mais *BMC* > ou < *BOC*. Donc auſſi *BAC* > ou < *BOC*.

COROLLAIRE VI.

Fig. 114. 139 Donc deux Triangles *BAC*, *BMC*, ſont compris entre les mêmes Paralléles, quand ils ſont égaux & qu'ils ont même baſe *BC*. Car ayant même baſe, ils ne ſeroient pas égaux (*N*°. 138.), s'ils n'étoient pas compris entre les mêmes Paralléles.

COROLLAIRE VII.

140 Il ſuit encore que deux Triangles ſont égaux, quand ils ont baſes égales & hauteurs égales.

Car avoir mê[illegible]baſe ou baſes égales, c'eſt la

même chose; & avoir hauteurs égales, c'est pouvoir être compris entre les mêmes Paralléles (*N°*. 128.).

COROLLAIRE VIII.

141 Donc si plusieurs Triangles *AMB*, *BNC*, *COD*, *DPE*, &c, dont toutes les bases *AB*, *DC*, *CD*, *DE*, sont bout à bout sur une Ligne droite *AE*, ont même hauteur, ils seront tous ensemble égaux au seul Triangle *AME*, qui aura la même hauteur, & dont la base sera la somme *AE* des bases de tous ces Triangles. Car tous ces Triangles qui ont même hauteur pourront être compris entre les mêmes Paralléles *MP*, *AE* (*N°*. 128.). Fig. 116.

Or (*N°*. 137.) si l'on tire les Droites *MC*, *MD*, *ME*, les Triangles *AMB*, *BNC*, *COD*, *DPE*, seront égaux aux Triangles *AMB*, *BMC*, *CMD*, *DME*, chacun à chacun. Mais $AMB + BMC + CMD + DME = AME$. Donc $AMB + BNC + COD + DPE = AME$.

THÉORÉME.

142 *Un Parallélogramme* ADCB *est égal au produit de sa Base* DC *& de sa Hauteur perpendiculaire* AE. Fig. 103.

DÉMONSTRATION.

Le Parallélogramme *ADCB* a été produit par sa base *DC* menée parallélement à elle-même le long du côté *DA*; & la base *DC* étant transportée en *AB* par ce mouvement, s'est éloignée de sa premiere position d'une quantité égale à la Perpendiculaire *AE* comprise entre les deux Paralléles *AB*, *DC*.

Or on peut snpposer que cette Ligne génératrice,

en s'éloignant de sa premiere position *D C*, & en passant successivement par tous les Points de la Droite *A E* qui lui est perpendiculaire, a engendré à chacun de ses Points une Ligne droite égale à elle-même ; en sorte qu'elle a rempli la surface du Parallélogramme, d'autant de Lignes égales à *D C*, qu'il y a de Points dans la hauteur *A E*.

Donc on aura l'aire ou la surface du Parallélogramme *A D C B*, en répétant sa base *D C* autant de fois qu'il y a de Points dans sa hauteur *A E*, c'est-à-dire, en multipliant la base *D C* par le nombre des Points de la hauteur *A E*.

Mais le nombre des Points de la hauteur *A E* ne peut pas être mieux exprimé que par la hauteur *A E* elle-même.

Donc enfin le Parallélogramme *A D C B* est égal au produit de sa base *D C* multipliée par sa hauteur *A E*. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Corollaire I.

Fig. 103. 143 1°. Si le Parallélogramme *A D C B* est un Rhomboïde, on ne pourra avoir sa hauteur, qu'en abaissant une Perpendiculaire *A E* ou *BF* d'un Point quelconque de sa base supérieure *A B* à sa base inférieure *D C* prolongée s'il est nécessaire. Ainsi pour avoir la surface de ce Parallélogramme, on commencera par mener cette Perpendiculaire à la base *D C*; & l'on multipliera ensuite cette base & cette Perpendiculaire l'une par l'autre : ce qui donnera $DC \times AE$, ou $AE \times DC$, pour la surface du Parallélogramme *A D C B*.

Fig. 104. 2°. Si le Parallélogramme *A D C B* est rectangle, ses côtés contigus *A D*, *D C*, seront perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi le côté *AD* ou *BC*, con-

tigu à la base DC, servira de hauteur; & l'on aura la surface du Rectangle $ADCB$, en multipliant l'un par l'autre deux côtés contigus de ce Rectangle: c'est-à-dire, qu'on aura $ADCB = DC \times AD$ ou $= DC \times BC$.

3°. Si le Parallélogramme $ADCB$ est un Quarré, ses côtés contigus AD, DC, seront égaux & perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi non seulement on pourra prendre pour sa hauteur le côté AD ou BC contigu à sa base DC; mais on pourra prendre encore le même côté AD ou DC ou BC pour la base & pour la hauteur de ce Quarré: en sorte que sa surface sera égale au produit $AD \times AD$ ou $DC \times DC$ ou $BC \times BC$ d'un côté multiplié par lui-même. Fig. 105.

Mais au lieu d'écrire $AD \times AD$ ou $DC \times DC$ ou $BC \times BC$, on écrit ordinairement pour abréger $\overline{AD}^2$ ou $\overline{DC}^2$ ou $\overline{BC}^2$. Ainsi ces expressions $\overline{AD}^2$, $\overline{DC}^2$, $\overline{BC}^2$, représentent un Quarré dont AD ou DC ou BC est le côté.

COROLLAIRE II.

144 Un Triangle DAC est (N°. 130.) la moitié d'un Parallélogramme $ADCB$ qui a même base DC & même hauteur AE que ce Triangle. Ainsi pour avoir l'aire d'un Triangle, il faut prendre la moitié du produit qui représente l'aire d'un Parallélogramme de même base & de même hauteur que ce Triangle. Fig. 117 & 118.

Mais l'aire du Parallélogramme $ADCB$, qui a même base & même hauteur que le Triangle DAC, est égale au produit $DC \times AE$ de sa base multipliée par sa hauteur (N°. 142 & 143.).

Donc la surface ou l'aire du Triangle DAC

eſt égale à la moitié du produit $DC \times AE$ de ſa baſe & de ſa hauteur ; c'eſt-à-dire, que le Triangle $DAC = \frac{DC \times AE}{2}$ ou $= DC \times \frac{AE}{2}$ ou $= \frac{DC}{2} \times AE$.

Il eſt évident que ſi le Triangle DAC n'eſt pas rectangle, on ſera obligé de mener une Perpendiculaire AE de ſon ſommet A ſur la baſe DC prolongée s'il eſt néceſſaire, pour avoir ſa hauteur, & pour exprimer ſa ſurface.

Fig. 119. Mais ſi le Triangle DAC eſt rectangle, les côtés DC, AD, adjacens à l'Angle droit D, ſeront perpendiculaires l'un à l'autre. Ainſi l'un pouvant être pris pour la baſe, & l'autre pour la hauteur du Triangle DAC, on aura l'aire de ce Triangle en multipliant l'un par l'autre ſes deux côtés DC, AD, contigus à l'Angle droit D, & en prenant la moitié de leur produit $DC \times AD$; c'eſt-à-dire, que le Triangle rectangle $DAC = \frac{DC \times AD}{2}$ ou $= DC \times \frac{AD}{2}$ ou $= \frac{DC}{2} \times AD$.

COROLLAIRE III.

145 Il ſuit du Théorême & des Corollaires précédens, que

Fig. 103 & 104. 1°. Pour repréſenter géométriquement le produit $DC \times AE$ de deux Lignes, on pourra faire un Parallélogramme $ADCB$, qui ait pour baſe l'un DC des deux Facteurs de ce produit, & pour hauteur l'autre Facteur AE du même produit ; ou bien faire un Parallélogramme rectangle $ADCB$ (*Fig.* 104.), dont deux côtés contigus DC, AD, ſoient égaux aux deux Facteurs DC, AE, de ce produit.

Fig. 105. 2°. Pour repréſenter $AD \times AD$ ou $\overline{AD}^2$, on pourra faire un Quarré dont chacun des côtés ſoit égal à AD.

Fig. 117 & 118. 3°. Pour repréſenter $\frac{DC \times AE}{2}$ ou $DC \times \frac{AE}{2}$ ou $\frac{DC}{2} \times AE$, on pourra faire un Triangle DAC.

qui ait pour base l'une DC des deux Lignes DC, AE, & qui ait pour hauteur l'autre Ligne AE; ou bien faire un Triangle rectangle DAC, dont les deux côtés DC, AD, contigus à l'Angle droit D, soient égaux aux deux Lignes DC, AD. Fig. 119.

REMARQUE.

146 Lorsque les côtés contigus DC, AD, d'un Parallélogramme rectangle $ADCB$, sont évalués en mesures quelconques arbitraires ou établies par l'usage, & qu'on multiplie le nombre des mesures contenues dans la base DC par le nombre des mesures contenues dans le côté contigu AD; le produit de la multiplication est le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme $ADCB$, & chacune de ces mesures quarrées a pour côté la mesure dont on s'est servi pour évaluer la longueur des côtés contigus DC, AD. Fig. 120.

Par exemple, si la base DC du Parallélogramme rectangle $ADCB$ est de 5 Toises, & que le côté AD soit de 6 Toises; en multipliant 5 par 6, le produit 30 de la multiplication sera le nombre des Toises quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme.

Car supposant que les parties égales DE, EF, FG, &c. représentent les Toises contenues dans la base DC, & que les parties DI, IK, KL, LM, &c. représentent les Toises contenues dans le côté AD contigu à la base; si par les Points I, K, L, M, &c. qui sont les bouts des Toises contenues dans la hauteur, on mene des Paralléles IO, KP, LQ, MR, &c. à la base DC, on divisera le Parallélogramme rectangle $ADCB$ en autant de Rectangles égaux DO, IP, KQ, LR, &c. qu'il y aura de Toises dans le côté AD. Ainsi il est évident que l'on

aura la surface du Parallélogramme rectangle *ADCB*, en multipliant un de ces Rectangles, par exemple, le Rectangle *DO*, par le nombre des Toises du côté *AD*.

Mais le Rectangle *DO* ayant une Toise de large, & ayant la même longueur que la base *DC*, contient évidemment autant de Toises quarrées qu'il y a de Toises dans la Base *DC*.

On aura donc le nombre des Toises quarrées contenues dans le Parallélogramme *ADCB*, en multipliant le nombre des Toises contenues dans la base *DC* par le nombre des Toises contenues dans le côté *AD* contigu à cette base. Ainsi les côtés contigus *DC*, *AD*, du Parallélogramme *ADCB*, étant l'un de 5 Toises & l'autre de 6 Toises, le produit 30 de 5 multiplié par 6 sera le nombre des Toises quarrées contenues dans le Parallélogramme *ADCB*.

Fig. 103. Lorsqu'un Parallélogramme *ADCB* est Rhomboïde, si des extrémités *A*, *B*, de l'un de ses côtés, on abaisse deux Perpendiculaires *AE*, *BF*, sur le côté opposé, on formera un Parallélogramme rectangle *AEFB*, qui sera égal au Rhomboïde *ADCB*: & comme on aura le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme rectangle *AEFB*, en multipliant le nombre des mesures de sa base *EF* par le nombre des mesures du côté *AE* contigu à cette base, on aura aussi le nombre des mesures quarrées contenues dans le Rhomboïde *ADCB*, en multipliant le nombre des mesures de *EF* ou *AB* ou *DC* par le nombre des mesures contenues dans la Perpendiculaire *AE*.

Fig. 117 & 118. Puisqu'un Triangle *DAC* est (N°. 130.) la moitié d'un Parallélogramme *ADCB* de même base *DC* & de même hauteur *AE* que ce Triangle, & qu'on aura le nombre des mesures quarrées contenues

dans

dans le Parallélogramme *ADCB*, en multipliant le nombre des mesures de sa base *DC* par le nombre des mesures de sa hauteur *AE*, on aura évidemment le nombre des mesures quarrées contenues dans le Triangle *DAC*, en tirant une Perpendiculaire *AE* de son sommet à sa base *DC* prolongée s'il est nécessaire, & en multipliant le nombre des mesures qu'on trouvera dans la base *DC* par le nombre des mesures qui seront dans la hauteur *AE*.

Comme la méthode pour faire ces Multiplications a été suffisamment expliquée dans l'article du Toisé qui fait partie de l'Arithmétique, & qui se trouve aux Numéros 90 & suivans de ce Traité, nous pouvons nous dispenser d'en parler ici.

CHAPITRE III.

Des Polygones.

147 ON appelle en général Polygone une Figure rectiligne dont on ne détermine pas le nombre des Angles où des côtés; & lorsqu'on veut distinguer ces Figures les unes des autres, c'est toûjours par le nombre de leurs Angles ou par le nombre de leurs côtés, comme nous l'avons dit (*N*°. 101.).

DÉFINITIONS.

148 Un Polygone *ABCDEF* est *régulier*, lorsqu'il peut avoir tous ses Angles à la Circonférence d'un même Cercle, & que tous ses côtés sont égaux. Fig. 121.

Un Polygone est *irrégulier*, quand il n'a pas tous ses côtés égaux, ou qu'il ne peut pas avoir tous ses Angles à la Circonférence d'un même Cercle.

Une Perpendiculaire *KG*, tirée du Centre *K* du Cercle sur un côté *AB* du Polygone régulier, se nomme *Apothême* de ce Polygone.

Corollaire I.

Fig. 121. 149 Donc si l'on tire des Droites du Centre *K* à tous les Angles d'un Polygone régulier, tous les Triangles *AKB*, *BKC*, *CKD*, &c, dans lesquels le Polygone sera divisé, seront parfaitement égaux entr'eux. Car ayant chacun pour côtés deux Rayons & un côté du Polygone, ils auront les trois côtés égaux chacun à chacun.

Corollaire II.

Fig. 121. 150 Donc tous les Triangles *BKG*, *BKH*, *CKH*, *CKI*, &c. qu'on fera dans un même Polygone régulier, en le divisant par des Rayons *BK*, *CK*, &c, & par des Apothêmes *KG*, *KH*, *KI*, &c seront parfaitement égaux; & les Apothêmes *KG*, *KH*, *KI*, &c. seront par conséquent égaux.

Car les Triangles *AKB*, *BKC*, *CKD*, &c étant isosceles & parfaitement égaux (*N*°. 149.), les Angles *GBK*, *HBK*, *HCK*, *ICK*, &c. seront tous égaux; & les Apothêmes *KG*, *KH*, *KI*, &c. étant des Perpendiculaires menées du Centre *K*, sur les Cordes égales *AB*, *BC*, *CD*, &c. qui servent de côtés au Polygone régulier, tomberont sur les milieux de ces Cordes (*N*°. 70.) : en sorte que toutes les Demi-cordes *BG*, *BH*, *CH*, *CI*, &c. seront égales entr'elles. Donc les Angles égaux *GBK*, *HBK*, *HCK*, *ICK*, &c. seront compris entre des Rayons égaux *BK*, *CK*, &c. & des Demi-cordes égales *BG*, *BH*, *CH*, *CI*, &c; & par conséquent (*N*°. 116.) les Triangles rectangles *GBK*, *HBK*, *HCK*, *ICK*, &c. seront parfaitement égaux: d'où il suit que les Apothêmes *KG*, *KH*, *KI*, &c. seront aussi parfaitement égaux.

THÉORÊME.

151 *Lorsqu'une Corde* A B *est égale au Rayon du Cercle, l'Arc qu'elle soutient est égal à la sixiéme partie de la Circonférence.* Fig. 121.

DÉMONSTRATION.

Soient tirés les Rayons *KA*, *KB*, aux extrémités de la Corde *AB* qu'on suppose égale au Rayon du même Cercle, le Triangle *AKB* qu'on formera sera équilatéral, & ses trois Angles seront par conséquent égaux (*No.* 112.) : & comme ces trois Angles ont ensemble pour mesure la moitié de la Circonférence, l'Arc *AB* qui sert de mesure à l'un d'eux, savoir, à l'Angle *AKB*, sera le tiers de la Demi-circonférence, ou la sixiéme partie de la Circonférence entiere. Ainsi lorsqu'une Corde *AB* est égale au Rayon, l'Arc *AB* qu'elle soutient est égal à la sixiéme partie de la Circonférence. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

152 On divisera donc exactement la Circonférence d'un Cercle en six parties égales, par le moyen de la même ouverture de Compas qui a servi à la décrire.

Comme en divisant la Circonférence du Cercle en six parties égales, & en tirant six Cordes par les six Points de division, l'on fait un Exagone régulier, il est évident que le côté d'un Exagone régulier est égal au Rayon du Cercle à la Circonférence duquel les Angles de l'Exagone sont placés.

REMARQUE.

Fig. 121. 153 Pour diviser la Circonférence d'un Cercle en Degrés, c'est-à-dire, en 360 parties égales, on mene d'abord par le Centre *K* deux Diametres *AB*, *CD*, perpendiculaires l'un à l'autre, & qui divisent par conséquent la Circonférence en quatre parties égales (*N*o. 83.). Ensuite, sans rien changer à l'ouverture du Compas dont on a décrit la Circonférence, on en place la pointe à l'extrémité *A* d'un Diametre, & l'on marque avec l'autre pointe sur la Circonférence deux Points *E*, *F*, qui donnent les deux Arcs *AE*, *AF*, égaux chacun à la sixiéme partie de la Circonférence : & comme la Circonférence de tout Cercle contient 360 Degrés, les Arcs *AE*, *AF*, seront chacun de 60 Degrés (*N*o. 151.) ; en sorte que les complémens *EC*, *FD*, de ces Arcs, seront chacun de 30 Degrés.

Appuyant ensuite en *B* une pointe du Compas toûjours ouvert de la même quantité, on marque sur la Circonférence avec l'autre pointe deux Points *G*, *H*, qui donnent par la même raison les Arcs *BG*, *BH*, chacun de 60 Degrés, & les deux Arcs *GC*, *HD*, chacun de 30 Degrés.

On fait de la même maniere les quatre Arcs *CI*, *CM*, *DL*, *DN*, chacun de 60 Degrés, en appliquant successivement une pointe du Compas en *C* & *D* ; ce qui donne les quatre complémens *AI*, *BM*, *AL*, *BN*, de ces quatre Arcs, chacun de 30 Degrés.

Par cette opération, la Circonférence du Cercle se trouve divisée en douze Arcs égaux *AI*, *IE*, *EC*, *CG*, *GM*, *MB*, &c. chacun de 30 Degrés.

On divise ensuite (*N*o. 82.) chacun de ces douze Arcs en deux parties égales ; ce qui donne 24 Arcs chacun de 15 Degrés.

Comme il n'y a point de méthode géométrique pour achever la division de ces 24 Arcs en 15 parties égales, on cherche en tâtonnant une ouverture de Compas qui puisse diviser chacun d'eux en trois parties égales; puis on cherche une nouvelle ouverture de Compas qui divise chacune de ces parties en cinq autres parties égales. Toutes ces opérations étant faites, la Circonférence se trouve divisée en 360 parties égales.

Les divisions qu'il faut faire pour diviser en Degrés un Cercle déjà partagé en quatre parties égales, sont énoncées dans ce Vers latin :

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

Il est aisé de voir par ce qui vient d'être dit de la Division de la Circonférence, qu'on peut construire géométriquement des Polygones de 3, de 4, de 6, de 12, de 24, & d'un nombre de côtés continuellement doublé.

Comme deux Diametres perpendiculaires l'un à l'autre divisent la Circonférence du Cercle en quatre parties égales, & qu'on sait diviser & subdiviser continuellement un Arc en deux parties égales (N°. 68.), il est clair qu'on a le moyen de décrire un Polygone régulier de 4, de 8, de 16, de 32, & d'un nombre quelconque de côtés continuellement doublé.

Nous verrons dans la suite qu'on peut diviser géométriquement la Circonférence d'un Cercle en 5 & en 10 parties égales : & comme chacune de ces parties peut être facilement divisée en deux également, nous en conclurrons qu'on peut construire géométriquement des Polygones de 5, de 10, & d'un nombre quelconque de côtés composé de 5 multiplié continuellement par 2.

Par la division géométrique de la Circonférence

en 5 parties égales qui valent chacune 72 Degrés; & par la division de la même Circonférence en 6 parties égales qui sont chacune de 60 Degrés, on trouve un Arc de 12 Degrés qui sont la trentiéme partie de 360 Degrés ou de la Circonférence entiere. Ainsi l'on peut diviser géométriquement la Circonférence du Cercle en 30 parties égales, & par conséquent en 15 & dans un nombre de parties égales continuellement double de 30, c'est-à-dire, en 60, 120, &c parties égales.

Comme on n'a point trouvé jusqu'ici de moyens géométriques pour diviser la Circonférence d'un Cercle en d'autres nombres de parties égales que ceux dont nous venons de parler, lorsqu'on aura un Polygone régulier à construire, dont le nombre des côtés ne sera pas 3 ou 4 ou 5 ou 15, ou ne sera pas continuellement double de ceux-ci, il faudra chercher en tâtonnant une ou plusieurs ouvertures de Compas, pour diviser la Circonférence du Cercle en autant de parties égales que le Polygone doit avoir de côtés.

SCHOLIE.

Fig. 123. 154 On déduit de ce Théorême une méthode pour élever une Perpendiculaire *AD* à l'extrémité *A* d'une Droite *AB*.

Du Point donné *A* comme Centre, & d'un Rayon pris à volonté, on décrira un Arc *EFG* qui rencontrera la Droite *AB* en un Point *E*; puis on portera le Rayon sur cet Arc de *E* en *F* & de *F* en *G*: ce qui donnera deux Arcs *EF*, *FG*, égaux chacun à la sixiéme partie de la Circonférence, ou à 60 Degrés. Ensuite des Points *F*, *G*, comme Centres, & d'une même ouverture de Compas, on décrira deux Arcs *MN*, *OP*, qui se couperont en un Point *D* également éloigné des deux Centres *F*, *G*; & l'on

ménera par ce Point *D* & par le Point *A* une Droite *D A* qui ſera perpendiculaire ſur la Corde *F G* (*N*°. 40.), & qui (*N*°. 68.) coupera l'Arc *FG* en deux parties égales, en ſorte que l'Arc *FH* ſera de 30 Degrés : & comme l'Arc *E F* eſt de 60 Degrés, l'Arc *E F H* ſera de 90 Degrés, & l'Angle *DA B* ſera par conſéquent droit ; d'où il ſuit que la Droite *A D* ſera perpendiculaire ſur la Droite *A B*.

THÉORÉME.

155 *La ſurface d'un Polygone régulier quelconque* ABCDEF *eſt égale à un Triangle* AKH *dont la baſe* AH *eſt égale au contour de ce Polygone, & dont la hauteur eſt égale à l'Apothême* KG *du même Polygone.* Fig. 124.

DÉMONSTRATION.

Du Centre *K* ſoient menés des Rayons à tous les Angles du Polygone qu'on ſuppoſe régulier : on le diviſera en autant de Triangles égaux qu'il aura de côtés (*N*°. 149.) ; & ces Triangles ayant pour hauteur l'Apothême du Polygone, ſeront tous de même hauteur.

Mais (*N*°. 141.) ſi l'on met de ſuite ſur une même Droite *AH* les baſes *AB*, *BC*, *CD*, &c de tous ces Triangles, c'eſt-à-dire, ſi l'on développe en une Ligne droite *A H* le contour du Polygone, & que ſur *A H* comme baſe, on faſſe un Triangle *A K H* ; lequel ait pour hauteur l'Apothême qui ſert de hauteur à tous ces Triangles, ce Triangle *A K H* ſera égal à la ſomme des Triangles qui compoſent le Polygone *A B C D E F*, & dont les baſes auront été miſes en Ligne droite.

Donc la ſurface d'un Polygone régulier quelconque *A B C D E F* eſt égale au Triangle *AKH*, dont

la base *AH* est égale au contour du Polygone régulier, & dont la hauteur est égale à l'Apothême *KG* de ce Polygone.

Corollaire I.

156 Mais la surface d'un Triangle *AKH* est égale à la moitié du produit de sa base *AH* multipliée par sa hauteur *KG* (*N*°. 44.). Donc la surface d'un Polygone régulier quelconque *ABCDEF* est égale à la moitié du produit fait de son contour multiplié par son Apothême *KG*. Fig. 124.

Corollaire II.

157 Lorsqu'un Polygone régulier est renfermé par une infinité de côtés, son contour differe infiniment peu de la Circonférence du Cercle, & son Apothême n'est pas moindre que le Rayon, d'une quantité finie. Ainsi un Polygone régulier d'une infinité de côtés, & le Cercle dans lequel il est décrit, peuvent être regardés comme égaux en toutes choses.

Donc puisque la surface du Polygone régulier en général est égale à un Triangle dont la base est de même longueur que le contour de ce Polygone, & dont la hauteur est la même que son Apothême, lorsque ce Polygone aura une infinité de côtés, sa surface sera égale à un Triangle qui aura pour base la Circonférence du Cercle de ce Polygone, & pour hauteur le Rayon du même Cercle : & comme la superficie du Cercle lui-même peut être prise pour celle de ce Polygone d'une infinité de côtés, il est clair que la surface d'un Cercle est égale à celle d'un Triangle qui a pour base la Circonférence de ce Cercle, & pour hauteur le Rayon du même Cercle.

On pourroit donc faire une Figure rectiligne égale à la surface d'un Cercle ; & l'on auroit ce qu'on appelle la Quadrature du Cercle, si l'on pouvoit trouver une Ligne

droite égale à une Circonférence dont on connoît le Rayon. Quoique ce Problême n'ait point été résolu, & qu'on désespere qu'il le soit jamais, on a des moyens de trouver avec autant de précision qu'on peut le desirer la valeur de la Circonférence. On trouvera (No. 594 & suiv.) *différens Rapports plus ou moins exacts du Diametre à la Circonférence. On y verra entr'autres que le Diametre ou le Rayon d'un Cercle étant représenté par 7, sa Circonférence ou sa Demi-circonférence le sera par 22 à peu de chose près; c'est-à-dire, qu'on aura la Circonférence ou la Demi-circonférence d'un Cercle avec assez de precision pour la Pratique, en multipliant son Diametre ou son Rayon par 3 &* $\frac{1}{7}$.

Ainsi, puisque l'aire du Cercle est égale à un Triangle qui a pour hauteur le Rayon & pour base la Circonférence, ou à un Rectangle d'une hauteur ou d'une base moindre de moitié; on pourra prendre pour la surface du Cercle un Triangle qui aura pour hauteur le Rayon & pour base trois fois le Diametre plus la septiéme partie de ce Diametre, ou un Parallélogramme qui aura la même base avec une hauteur égale au Demi-rayon, ou enfin un Parallélogramme qui aura pour hauteur le Rayon & pour base trois fois ce Rayon avec sa septiéme partie.

Un Secteur DKBCA, *ou* DKCA, *ou* DKA, *qui ne contient que les trois quarts ou la moitié ou le quart de la Circonférence, ne valant que les trois quarts ou la moitié ou le quart du Cercle, & étant par conséquent égal à un Triangle de même hauteur que le Rayon, & dont la base vaut les trois quarts ou la moitié ou le quart de la Circonférence; on en trouvera la surface en le considérant comme un Triangle de même hauteur que le Rayon, & d'une base égale aux trois quarts, à la moitié, ou au quart d'une Ligne égale à trois fois le Diametre plus un septiéme de ce Diametre. On trouvera de même la surface de tout Secteur de Cercle, quand on connoîtra le Rapport de son Arc à la Circonférence entiere.* Fig. 122.

REMARQUE.

Fig. 122. 158 Puisqu'on sait trouver la surface d'un Secteur quelconque *AKDFL* de Cercle avec une précision suffisante dans la Pratique, & qu'on peut avoir l'aire du Triangle *AKD* compris entre les deux Rayons *AK*, *DK*, & la Corde *AD*; il est évident qu'en cherchant séparément l'aire du Secteur *AKDFL* & l'aire du Triangle *AKD*, & qu'en ôtant l'aire du Triangle de celle du Secteur, on aura l'aire du Segment *ADFL*.

Fig. 125 126 & 127. Comme tout Polyg. rectiligne irrégulier *ABCDEF* peut être partagé en Triangles, par des Lignes tirées de tel point *H* qu'on voudra à tous ses Angles, & qu'on peut avoir (*N*° 146.) la surface de chaque Triangle; il est évident qu'on est en état de trouver la surface de tous les Polygones rectilignes irréguliers.

Fig. 128. Si quelques côtés *BGC*, *CHD*, *DIEKF*, du Plan *ABGCHDIEKF*, étoient des Arcs de Cercles, on en pourroit trouver la surface, en tirant les Cordes *BC*, *CD*, *DF*, de ces côtés courbes, pour partager le Plan proposé en un Polygone rectiligne *ABCDF*, & en autant de Segmens circulaires *BGC*, *CHD*, *DIEKF*, qu'on a de côtés courbes. Car en cherchant séparément la surface du Polygone rectiligne & celle de chaque Segment, & additionnant ensuite les aires de toutes ces Figures, on auroit celle du Plan mixtiligne proposé.

Il n'est pas nécessaire pour faire usage de cette pratique, que les côtés courbes soient exactement des Arcs de Cercles; il suffit qu'ils en approchent assez, pour que l'erreur qu'on peut commettre en les considérant comme des Arcs de Cercles ne soit pas sensible.

Si le Plan mixtiligne avoit quelque côté courbe tel que *DIEKF*, qui ne pût pas être regardé comme un Arc de Cercle, sans induire dans une erreur sensible, on pourroit partager ce côté courbe en

deux parties *DIE*, *EKF*, dont chacune approcheroit davantage de la figure d'un Arc de Cercle que l'Arc total n'en approchoit; & tirant les deux Cordes *DE*, *EF*, on chercheroit séparément les aires des deux Segmens *DIE*, *EKF*, qu'on joindroit avec les autres parties qu'on suppose trouvées. Enfin si les deux parties *DIE*, *EKF*, du côté courbe *DIEKF*, étoient encore trop différentes de deux Arcs de Cercles pour y être rapportées, on partageroit ce côté courbe en trois ou quatre ou cinq, ou en autant de parties qu'on jugeroit nécessaires, pour que chacune pût être considérée comme un Arc de Cercle; & après avoir tiré les Cordes de ces parties courbes pour partager le Plan proposé en un Polygone rectiligne, & en autant de Segmens qu'on auroit de parties courbes, on chercheroit, comme nous l'avons dit, les aires de ce Polygone & de tous les Segmens. Enfin l'on additionneroit ensemble toutes les valeurs des parties dans lesquelles le Plan seroit divisé; & l'on auroit l'aire totale du Plan mixtiligne proposé.

CHAPITRE IV.

De la Réduction, de l'Addition, Soustraction, Multiplication & Division des Figures rectilignes.

PROBLÊME.

159 *Élever ou abaisser un Triangle* BAC *à une hauteur donnée, sans changer l'étendue de sa superficie.* Fig. 129, 130, 131 & 132.

SOLUTION.

On choisira un Point *D* qui soit élevé au-dessus de la base *BC* d'une quantité égale à la hauteur qu'il-

faut donner au nouveau Triangle qu'on demande ; & l'on prendra ce Point *D* pour le ſommet du Triangle qu'il faut conſtruire.

Fig. 129 & 130. 1°. Si le Point *D* a été pris ou donné ſur un côté *BA* du Triangle *BAC*, ou ſur le prolongement de ce côté, du Point *D* on tirera une Droite *DC* à l'Angle oppoſé *C*, & on lui ménera par le ſommet *A* une Parallele *AE*, qui rencontrera en *E* la baſe *BC* ou ſon prolongement. Puis on tirera la Droite *DE* ; & l'on aura un Triangle *BDE* qui ſera égal au Triangle *BAC*, & qui aura la hauteur demandée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Pour démontrer que les Triangles *BDE*, *BAC*, ſont égaux, on remarquera que les Triangles *DAC*, *DEC*, qui ont même baſe *DC*, & qui ſont compris entre mêmes Paralléles *DC*, *AE*, ſont égaux (*N°*. 137.). Ainſi (*Fig.* 129.) ſi l'on ajoûte ces deux Triangles égaux au même Triangle *BDC*, ou bien (*Fig.* 130.) ſi on les retranche du même Triangle *BDC*, il en réſultera les deux Triangles égaux *BAC*, *BDE*.

Fig. 131 & 132. 2°. Si le Point *D*, qui doit être le ſommet du Triangle demandé, n'a point été pris ou donné ſur un côté *BA* du Triangle *BAC*, ni ſur ſon prolongement, on ménera par ce Point *D*, & par une extrémité *B* de la baſe du Triangle donné, une Droite indéfinie *BD*, que l'on coupera par une Droite *Aa* menée par le ſommet *A* parallélement à la baſe *BC*. Puis du Point de ſection *a* on ménera à l'autre extrémité *C* de la baſe du Triangle donné, une Droite *aC* ; & l'on aura un Triangle *BaC* égal au Triangle donné *BAC*.

Le Point *D*, où il faut placer le ſommet du Triangle qu'on doit conſtruire, étant ſur le côté *Ba* du Triangle *BaC*, ou ſur le prolongement de ce côté,

& le Triangle *BDE* qu'on demande devant être égal au Triangle *BAC*, ou à ſon égal *BaC*, on conſtruira le Triangle *BDE*, comme il a été expliqué dans le premier cas; c'eſt-à-dire, qu'on tirera *DC*, & que lui ayant mené une Parallèle *aE*, on tirera la Droite *DE* qui donnera un Triangle *BDE* tel qu'on le demande.

COROLLAIRE.

160 Si l'on veut convertir le Triangle *BAC* en un autre *BDE* de même valeur, dont la hauteur & l'Angle *DBE* ſoient donnés, on ménera la Droite indéfinie *BDa* qui faſſe avec *BC* l'Angle qu'on demande. Puis on prendra ſur *BDa* un Point *D* qui ſoit élevé au-deſſus de *BC* d'une quantité égale à la hauteur qu'il faut donner au Triangle *BDE* qu'on veut conſtruire; & le Point *D*, où il faut placer le ſommet de ce Triangle, étant ainſi déterminé, on conſtruira ce Triangle *BDE*, comme il a été dit dans la ſolution du Problême. Fig. 131 & 132.

PROBLÊME.

161 *Réduire une Figure rectiligne* ABCDE *à une Figure* ABFE *qui lui ſoit égale, & qui ait un côté de moins.* Fig. 133 & 134.

SOLUTION.

Par les extrémités des deux côtés *DE*, *DC*, d'un même Angle *D* de la Figure propoſée, on tirera une Droite *EC*, & on lui ménera par le ſommet *D* de cet Angle une Parallèle *DF* qui ſera terminée en *F* par le côté *BC* ou par ſon prolongement. Enſuite on tirera la Droite *EF*; & l'on aura un nouveau Polygone *ABFE* qui ſera égal au propoſé *ABCDE*, & qui aura un côté de moins que lui. *Ce qu'il falloit trouver.*

Car les deux Triangles *EDC*, *EFC*, qui ont même base *EC* & qui sont compris entre mêmes Paralléles, sont égaux (*No.* 137.). Ainsi (*Fig.* 133.) en ajoûtant chacun de ces Triangles avec *ABCE*, ou bien (*Fig.* 134.) en les retranchant de *ABCE*, on trouvera la Figure proposée *ABCDE* égale à la nouvelle Figure *ABFE* qui a un côté de moins.

COROLLAIRE I.

162 Donc toute Figure rectiligne peut être réduite en Triangle. Car on la réduira d'abord à une autre Figure qui aura un côté de moins; celle-ci se réduira ensuite à une nouvelle Figure qui aura encore un côté de moins; & toûjours ainsi de suite, jusqu'à ce que la Figure soit réduite en Triangle.

Fig. 135 & 136. Par exemple, si l'on propose de réduire le Polygone *ABCDEF* en un Triangle *IAH* qui ait le sommet *A* à la Circonférence du Polygone, & la base sur le côté *CD* prolongé de part & d'autre;

1°. Par l'extrémité *D* du côté *CD*, on tirera la Diagonale *DF* qui séparera du Polygone proposé un Triangle *DEF*. Puis ayant mené parallélement à *DF* la Droite *EG* qui rencontrera en *G* le prolongement de *CD*, on tirera la Droite *FG*; & l'on aura, par cette premiere opération, un Polygone *ABCGF* qui (*No.* 161.) sera égal au Polygone proposé, & aura un côté de moins.

2°. Le Polygone proposé *ABCDEF* étant réduit au Polygone *ABCGF*, on ne considérera plus que ce dernier pour le réduire en un autre *ABCH* qui ait encore un côté de moins. Pour cela on tirera la Droite *AG*, & on lui ménera une Paralléle *FH* qui rencontrera le prolongement de *CD* en *H*. Puis on tirera AH; ce qui donnera le nouveau Polygone *ABCH* égal au précédent *ABCGF*, & par conséquent égal au Polygone proposé *ABCDEF*.

3°. Le dernier Polygone *ABCH* auquel le proposé a été réduit, ayant un côté *AH* qui peut servir de côté au Triangle *IAH* que l'on doit construire, on n'aura plus à réduire que sa partie *ABC*. Pour cela on tirera la Droite *AC*, & on lui ménera une Paralléle *BI* qui rencontrera en *I* le prolongement de la base *DC*. Puis on tirera *AI*; & le Polygone *ABCDEF* se trouvera réduit en un Triangle *IAH* tel qu'on le demande.

Dans la Figure 135, le Point A *donné pour le sommet du Triangle auquel le Polygone devoit être réduit, a été pris au sommet de l'un des Angles du Polygone; & dans la Figure 136, le même Point* A *a été pris sur un côté du Polygone. Ainsi la Construction est la même, pour réduire un Polygone à un Triangle qui ait son sommet à l'un des Angles du Polygone, & pour le réduire à un Triangle qui ait le sommet sur un côté du Polygone.*

COROLLAIRE II.

163 Comme un Triangle peut toûjours être transformé (*N*°. 159.) en un autre Triangle de telle hauteur qu'on veut; qu'on peut placer le sommet du nouveau Triangle à un Point donné quelconque; qu'on peut même (*N*°. 160.) faire l'Angle de la base du nouveau Triangle de la grandeur qu'on le demandera; si l'on proposoit de réduire un Polygone à un Triangle qui eut le sommet à un Point donné quelconque au dedans ou au dehors du Polygone, ou qui fût d'une hauteur donnée, & qui eut un Angle à la base d'une certaine grandeur, on commenceroit par réduire ce Polygone à un Triangle qui auroit son sommet au sommet de l'un des Angles ou sur un côté du Polygone: ensuite on convertiroit ce Triangle en un autre qui auroit les conditions demandées.

Corollaire III.

Fig. 137. 164 Si la Figure est un Parallélogramme *EBCD*, le Triangle *BEF*, auquel on le réduira, aura une base *BF* double de celle *BC* du Parallélogramme, lorsque son sommet *E* sera dans le côté opposé à la base de ce Parallélogramme. Car pour réduire le Parallélogramme *EBCD* au Triangle *BEF*, on tire sa Diagonale *EC*, & on lui mene la Paralléle *DF* qui rencontre le prolongement de la base *BC* en *F*; ce qui donne *BF* pour la base du Triangle égal au Parallélogramme *EBCD*. Or à cause des Paralléles *EC*, *DF*, on a $CF=ED$; & (No. 129.) $ED=BC$. Ainsi $CF=BC$: & par conséquent *BF* est double de *BC*.

Il suit de là que l'on convertira un Triangle *BEF* en un Parallélogramme *EBCD*, en menant par son sommet *E* une Droite *ED* paralléle à la base *BF*, & en menant par le milieu *C* de la base une Paralléle *CD* au côté *BE*. Car par cette construction l'on fera un Parallélogramme *EBCD* égal au Triangle *BEF*.

Scholie.

Comme on peut avoir besoin de faire sur les Figures rectilignes des opérations semblables à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres, c'est-à-dire, qu'on peut être obligé d'ajoûter plusieurs Figures en une seule; de retrancher une Figure d'une autre; de multiplier une Figure, ou d'en trouver une autre qui contienne un nombre donné de fois celle qui est proposée; de diviser une Figure en un nombre donné de parties égales; nous allons expliquer toutes ces opérations.

De l'Addition des Figures.

165 1°. Si toutes les Figures qu'on veut ajoûter ensemble sont des Triangles *AMB*, *BNC*, *COD*, *DPE*, de même hauteur, on mettra toutes leurs bases *AB*. *BC*. *CD*. *DE*. bout à bout en Ligne droite *AE*; & ayant fait un Triangle *AME* qui ait *AE* pour base, & qui ait pour hauteur celle de l'un des Triangles donnés, ce Triangle sera la somme de tous ceux *AMB*. *BNC*. *COD*. *DPE*. qu'on vouloit ajoûter ensemble (*N*°. 141.). Fig. 116.

166 2°. Si toutes les Figures qu'on se propose de convertir en un seul Triangle, sont des Triangles de différentes hauteurs, ou sont des Polygones différens quelconques, on réduira toutes ces Figures à des Triangles de même hauteur (*N*°. 159. ou 162.): ensuite on ajoûtera tous ces Triangles de même hauteur en un seul Triangle (*N*°. 165.).

167 3°. Si le Triangle dans lequel il faut rassembler toutes les Figures données, doit avoir le sommet en un Point donné, ou doit être d'une certaine hauteur déterminée, & doit aussi avoir à sa base un Angle d'une certaine grandeur, on commencera par réduire toutes les Figures proposées en Triangles qui ayent tous pour hauteur celle qu'on veut donner au Triangle total; & les Triangles résultans de cette opération étant réduits à un seul Triangle (*N*°. 165.), on réduira le Triangle total à un autre qui ait son sommet au Point donné (*N*°. 159.), ou bien on le convertira (*N*°. 160.) en un autre qui ait une hauteur donnée, & dont un Angle de la base soit tel qu'on le demande.

168 Si toutes les Figures doivent être réduites en un seul Parallélogramme, on les rassemblera d'abord

en un même Triangle : ensuite on réduira ce Triangle en Parallélogramme (N°. 164.).

De la Multiplication d'une Figure proposée.

Fig. 138. 169 1°. Pour multiplier un Triangle par un nombre donné, par exemple, pour multiplier un Triangle *AMB* par 4, c'est-à-dire, pour trouver un Triangle qui soit quadruple du Triangle *AMB*, on prolongera la base *AB* de ce Triangle jusqu'en *E*, de maniere que *AE* soit quadruple de *AB* ; ensuite on ménera du sommet au Point *E* la Droite *ME* : & l'on aura un Triangle *AME*, qui sera quadruple du Triangle proposé *AMB*.

Car la base *AE* étant quadruple de *AB*, sera composée de quatre parties égales *AB*, *BC*, *CD*, *DE* ; & tirant les Droites *MC*, *MD*, les quatre Triangles *AMB*, *BMC*, *CMD*, *DME*, qui auront des bases égales & même hauteur, seront égaux : ainsi leur somme *AME* sera quadruple du Triangle *AMB*.

170 2°. Si l'on vouloit un Triangle qui fut quadruple d'une Figure rectiligne quelconque, & qui eut une hauteur donnée, on réduiroit cette Figure en un Triangle de la hauteur donnée, & l'on chercheroit un autre Triangle qui seroit quadruple de ce Triangle, de la même maniere qu'on a cherché un Triangle *AME* quadruple du Triangle *AMB* (N°. 169.).

De la Soustraction des Figures rectilignes.

I.

Fig. 139 & 140. 171 1°. Si deux Triangles *BAC*, *dac*, sont de même hauteur, & qu'il faille retrancher le second du premier, on ôtera de la base *BC* du premier

une partie *DC* égale à la base *dc* du second : & ayant mené du sommet *A* au point *D* la Droite *AD*, le Triangle *BAD* sera le Reste de la Soustraction proposée ; c'est-à-dire, que *BAD* sera la différence des deux Triangles *BAC*, *dac*.

Car les Triangles *BAC*, *dac*, étant supposés de même hauteur, les deux Triangles *DAC*, *dac*, seront aussi de la même hauteur : & comme leurs bases *DC*, *dc*, sont égales (*constr.*), ils seront égaux (*No*. 140.). Ainsi *BAD* étant la différence des deux Triangles *BAC*, *DAC*, sera aussi la différence des deux Triangles *BAC*, *dac*.

2°. Si les deux Triangles *BAC*, *dac*, n'étoient pas de la même hauteur, & qu'il fallut trouver un Triangle égal à la différence de ces deux Triangles, on réduiroit l'un à la hauteur de l'autre ; ensuite on retrancheroit le plus petit du plus grand, comme on vient de l'expliquer.

3°. Si l'on proposoit de retrancher un Polygone d'un autre Polygone, & de trouver un Triangle égal au Reste de la Soustraction, l'on réduiroit ces deux Polygones à des Triangles de même hauteur ; ensuite on retrancheroit le plus petit Triangle du plus grand, comme il a été dit.

II.

172 On peut encore retrancher un Triangle donné d'un Polygone quelconque, en tirant dans ce Polygone une Ligne droite par un Point *F* donné sur l'un de ses côtés. Fig. 141, 142, 143, & 144.

Pour faire cette Soustraction, supposons que le Triangle qu'on doit retrancher du Polygone *ABCDE*, est converti dans un Triangle *MOP*, dont la hauteur au-dessus de sa base *MP* est égale à celle du Point *F* au-dessus du côté *AB* contigu à celui sur lequel le Point *F* a été pris. Cela posé,

on prendra sur le côté *AB*, prolongé s'il est nécessaire, une partie *AG* égale à la base *MP* du Triangle *MOP*; & ayant mené par le Point *F* la Droite *FG*, on aura un Triangle *AFG* égal au Triangle *MOP* qu'on doit retrancher. Mais il peut arriver trois cas principaux que l'on va détailler.

Fig. 141 & 142. 1°. Si la base *MP* du Triangle *MOP* ne surpasse pas le côté *AB*, & par conséquent si le Point *G* tombe sur le côté *AB*, le Problême sera résolu.

Fig. 141, 143 & 144. Si la base *MP* du Triangle *MOP* est plus grande que le côté *AB*, c'est-à-dire, si le Point *G* se trouve sur le prolongement du côté *AB*, on tirera la Droite *FB* du Point *F* à l'extrémité du côté *AB*, & on lui ménera par le Point *G* une Paralléle *GH*, qui rencontrera le côté *BC* ou son prolongement en quelque Point *H*; ce qui fera deux cas différens.

Fig. 141 & 143. 2°. Dans le cas où le Point *H* se trouvera sur le côté *BC* contigu au côté *AB*, on ménera par ce Point *H* & par le Point *F* une Droite *FH*, qui retranchera du Polygone proposé un Quadrilatere *FABH* égal au Triangle donné *MOP*. Car si l'on tire *FG*, les Triangles *FBG*, *FBH*, de même base & compris entre mêmes Paralléles, seront égaux. Ainsi ajoûtant à chacun le Triangle *AFB*, on aura le Quadrilatere *FABH* égal au Triangle *FAG*, & par conséquent égal au Triangle donné *MOP*.

Fig. 141 & 144. 3°. Dans le cas où la Droite *GH* paralléle à *FB* ne rencontrera que le prolongement du côté *BC* contigu à la base *AB*, par le Point donné *F* & l'extrémité *C* du côté *BC* adjacent à la base *AB*, on tirera une Droite *FC*; & lui ayant mené par le Point *H* une Paralléle *HI* qui coupe le côté suivant en *I*, on tirera la Droite *FI*, qui retranchera du Polygone proposé un Pentagone *FABCI* égal au Triangle donné *MOP*. Car si l'on tire *FH*, on aura

toûjours, comme ci-dessus, le Quadrilatere *FABH* égal au Triangle *FAG* qui est égal au Triangle *MOP*. Mais les Triangles *FCI*, *FCH*, étant égaux (puisqu'ils ont même base *FC* & qu'ils sont entre mêmes Paralléles), si on leur ajoûte la partie commune *FABC*, on aura *FABCI*=*FABH*. Donc puisque *FABH* = *MOP*, on aura aussi *FABCI*=*MOP*.

De la Division des Figures rectilignes.

I.

173 1°. Si la Figure qu'on propose de diviser en parties égales, est un Triangle *AME*, on partagera sa base en autant de parties égales qu'on voudra diviser sa superficie; & du sommet ayant mené des Lignes droites à tous les Points de division, le Triangle proposé sera partagé en autant de parties égales qu'on le demande. Fig. 138.

Par exemple, si l'on doit partager le Triangle *AME* en quatre parties égales, on divisera sa base *AE* en quatre parties égales aux Points *B*, *C*, *D*; puis on tirera du sommet *M* à ces Points de division les Droites *MB*, *MC*, *MD*, qui partageront le Triangle proposé *AME* en quatre parties égales.

2°. Si le Triangle *AME* qu'on veut partager en quatre parties égales, doit être divisé par des Lignes menées d'un Point *m* donné sur l'un de ses côtés, on convertira (N°. 159.) le Triangle proposé *AME* en un autre *Ame* de même valeur, qui aura son sommet au Point donné *m*. Ensuite on divisera la base *Ae* en quatre parties égales aux Points *B*, *C*, *D*; & l'on ménera par le Point *m* & par les Points de division *B*, *C*, *D*, des Lignes *mB*, Fig. 139.

mC, *m D*, qui diviſeront le Triangle *A m e* en quatre parties égales *A m B*, *B m C*, *C m D*, *D m e*; dont chacune ſera par conſéquent égale au quart du Triangle propoſé *A M E*.

Si les trois Lignes de diviſion *m B*, *m C*, *m D*, ſont toutes entièrement compriſes dans le Triangle propoſé *A M E*, ces Lignes diviſeront le Triangle comme on le demande, & le Problême ſera réſolu.

Mais s'il ſe trouve quelque Ligne de diviſion, comme *m D*, qui ſorte du Triangle donné *A M E* pour diviſer le Triangle *A m e*, on tirera la Droite *m E*; & lui ayant mené une Paralléle *D d* qui coupe le côté *M E* en *d*, on tirera la Droite *m d* qui donnera le Quadrilatere *m C E d* égal au Triangle *CmD*, ou au quart du Triangle propoſé *A M E*.

Les trois parties *A m B*, *B m C*, *m C E d*, du Triangle propoſé *A M E*, étant égales aux trois Triangles *AmB*, *BmC*, *CmD*, qui ſont les trois quarts du Triangle *Ame*, ſeront auſſi les trois quarts du Triangle propoſé *AME*. Ainſi la quatriéme partie *mdM* ſera le quatriéme quart du même Triangle; & par conſéquent les Droites *m B*, *m C*, *m d*, diviſeront le Triangle propoſé *A M E* en quatre parties égales.

II.

Fig. 146. 174 Si l'on propoſe de diviſer un Polygone *ABCDEF* en un nombre donné de parties égales, par exemple, en quatre parties égales, par des Droites tirées d'un même Point G ſitué ſur un côté *AF* de ce Polygone, on pourra le faire par une méthode ſemblable à celle qu'on a expliquée pour la Souſtraction des Figures rectilignes (*N*°. 172.).

Pour cela, on convertira le Polygone propoſé en un Triangle *A G M* (*N*°. 162.), qui ait le ſome

met au Point donné *G* duquel doivent partir toutes les Lignes de division du Polygone. Puis ayant divisé le Triangle *AGM* en autant de Triangles égaux *AGH*, *HGI*, *IGK*, *KGM*, qu'on veut avoir de parties égales dans le Polygone, on soustraira de ce Polygone une partie égale au Triangle *AGH*. Ensuite on en soustraira une partie égale au Triangle *AGI*, puis une partie égale au Triangle *AGK*; & les Lignes qu'on tirera par le Point *G* pour faire ces trois Soustractions, diviseront le Polygone en quatre parties égales.

Pour donner un exemple de ces Soustractions, on va retrancher du Polygone *ABCDEF* une partie égale au Triangle *AGK* qui contient les trois quarts du Triangle *AGM* dans lequel le Polygone a été réduit.

Par le Point donné *G* ayant mené les Droites *GB*, *GC*, *GD*, aux Angles *B*, *C*, *D*, du Polygone, par le Point *K* placé à l'extrémité du troisiéme quart de la base *AM* du Triangle *AGM*, on ménera parallélement à *GB* une Droite *KL* qui rencontrera le prolongement du côté *BC* en *L*; par le Point *L* on ménera parallélement à *GC* une Droite *LN* qui rencontrera le prolongement du côté suivant en *N*; par le Point *N* on ménera parallélement à *GD* une Droite *NO* qui rencontrera le côté *DE* en *O*; enfin par le Point *O* & par le Point donné *G* on tirera la Droite *OG*, qui séparera du Polygone proposé une partie *GABCDO* égale au Triangle *AGK*, qui vaut les trois quarts du Triangle *AGM*, ou du Polygone proposé.

Pour le démontrer, soient tirées les deux Droites *GN*, *GL*.

1°. Les Triangles *GDO*, *GDN*, auront même base *GD* & seront compris entre mêmes Paralléles

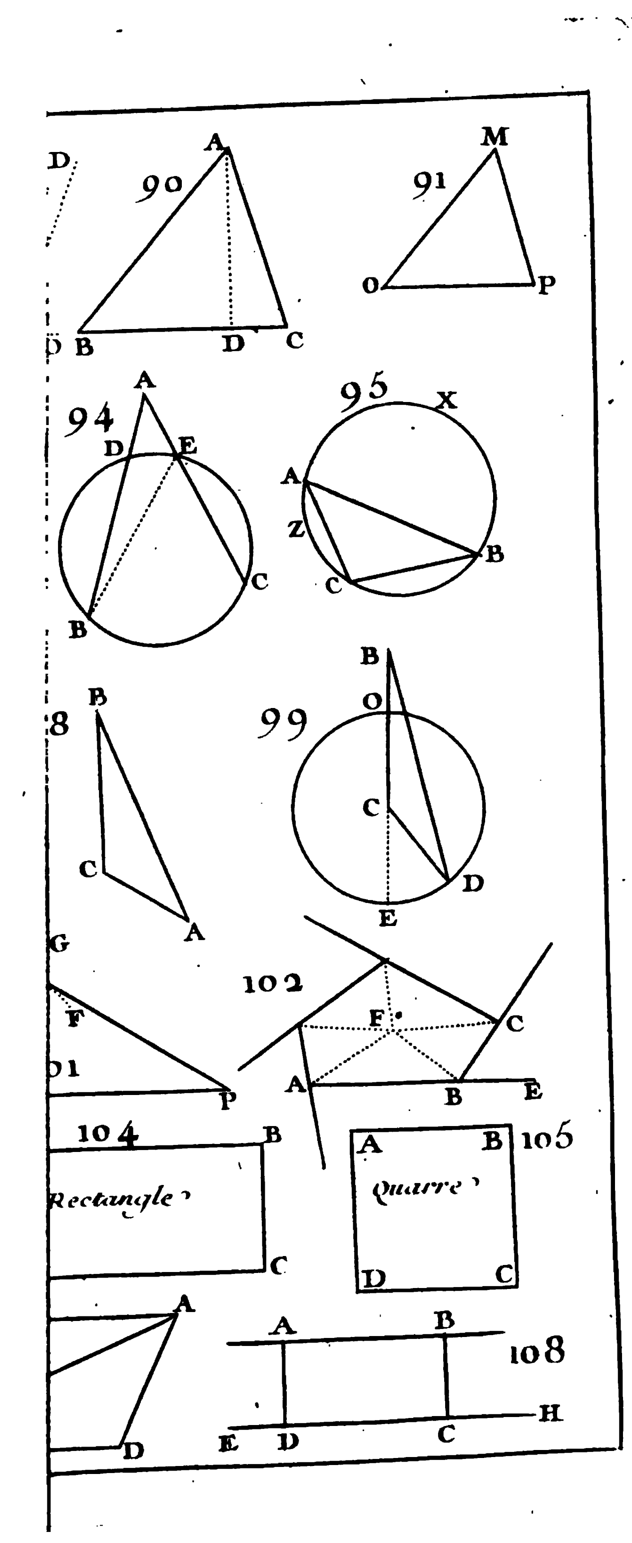
GD, NO, & feront par conféquent égaux (*N*°. 137.): Ainfi en leur ajoûtant le Triangle *GCD*, on aura *GCDO*=*GCN*.

2°. Les Triangles *GCN*, *GCL*, qui auront même baſe *GC* & qui feront compris entre les mêmes Paralléles *GC*, *LN*, feront égaux; & comme *GCDO*=*GCN*, on aura auffi *GCDO*=*GCL*. Ainfi en ajoûtant le Triangle *GBC*, l'on aura *GBCDO* = *GBL*.

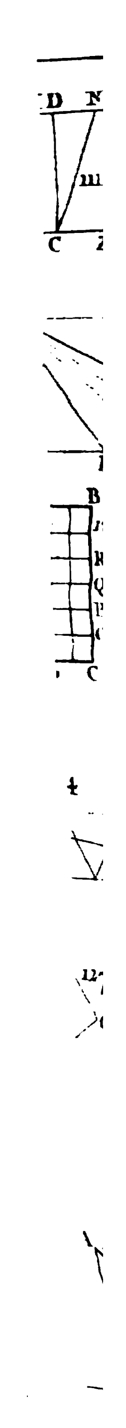
3°. Les Triangles *GBL*, *GBK*, ayant même bafe *GB* & étant compris entre les mêmes Paralléles *GB*, *KL*, feront égaux; & comme *GBCDO*=*GBL*, on aura auffi *GBCDO*=*GBK*. Ainfi en ajoûtant le Triangle *GAB*, l'on aura *GABCDO*=*GAK*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

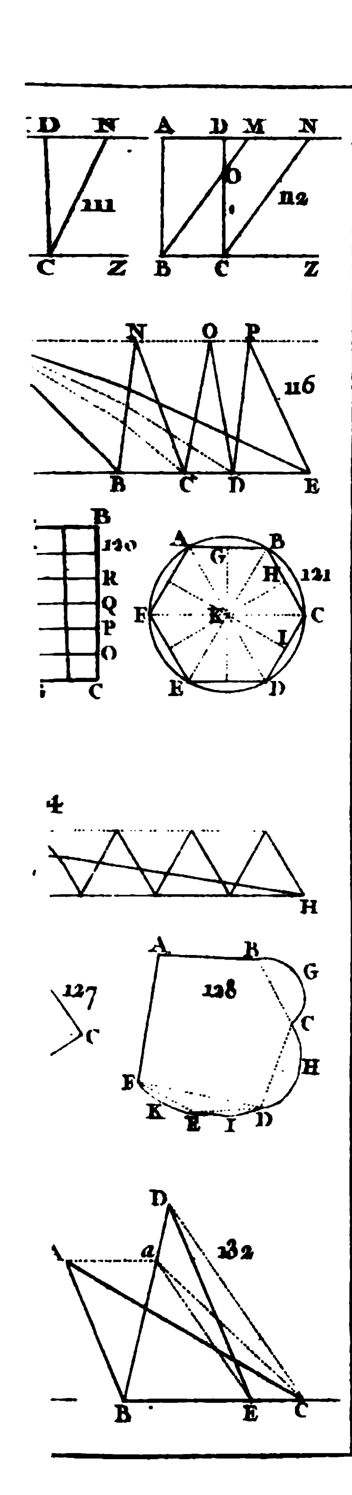
On doit remarquer que les Droites *KL*, *LN*, *NO*, qui foutiennent les Angles extérieurs *CBK*, *DCL*, *EDN*, du Polygone propofé *ABCDEF*, font paralléles aux Droites *GB*, *GC*, *GD*, tirées du Point donné *G* aux fommets *B*, *C*, *D*, de ces Angles extérieurs; & qu'on doit tirer autant de ces Paralléles, qu'il en faut pour que la derniere *NO* rencontre un côté du Polygone, & détermine fur ce côté le Point *O* par lequel doit paffer la Ligne de divifion *GO*.

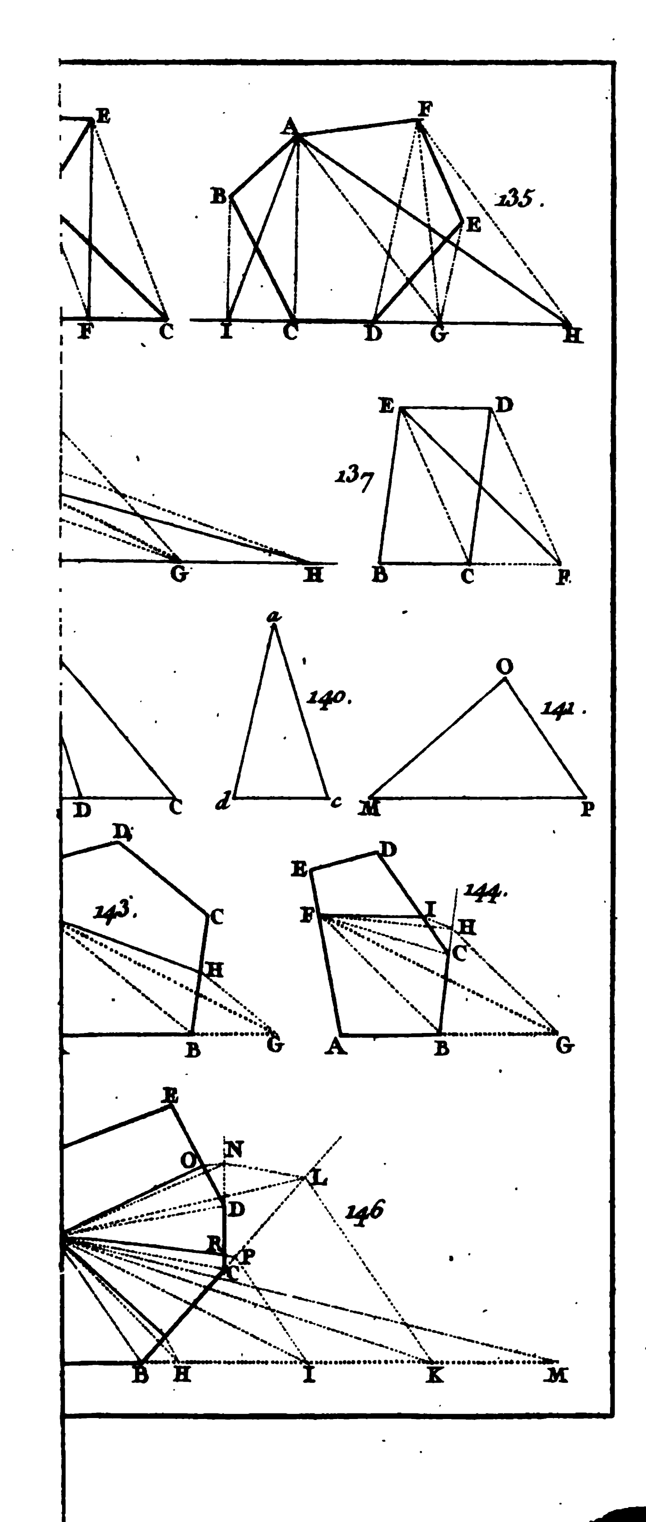
On démontrera de la même maniere, que fi dans l'Angle extérieur *CBM* on tire *IP* paralléle à *GB*, que dans l'Angle extérieur *DCL* on mene *PR* paralléle à *GC*, & que par le Point donné *G* l'on tire *GR* au Point *R* où le côté du Polygone eft rencontré, cette Droite *GR* retranchera du Polygone *ABCDEF* une partie *GABCR* égale au Triangle *GAI* qui vaut la moitié du Triangle *AGM* dans lequel le Polygone *ABCDEF* a été transformé.



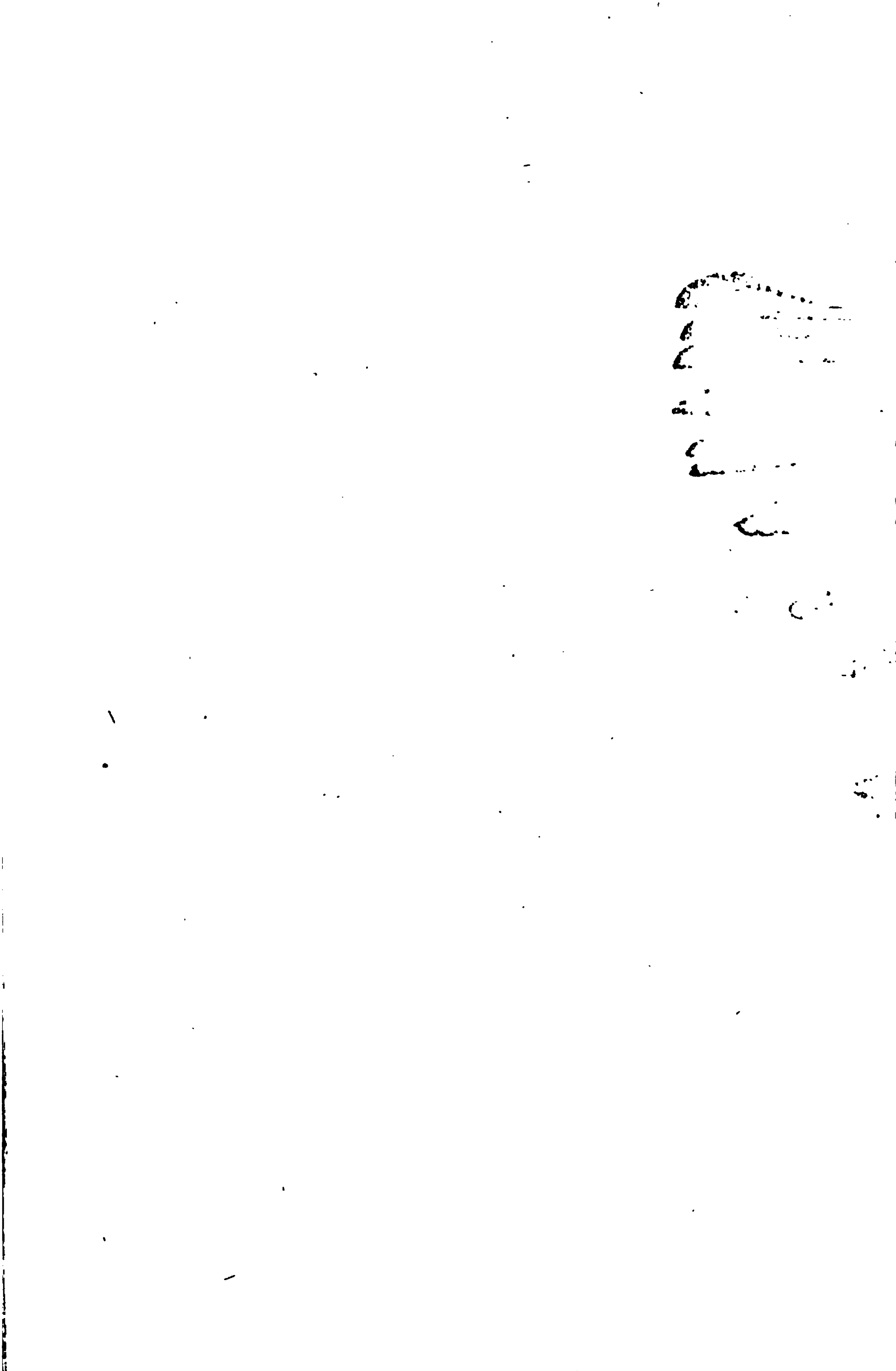
90
A
B D C
D
91
M
O P
94
A
D E
B C
95
X
A
Z
C B
8
B
C
A
99
B
O
C
D
E
G
F
01
P
102
F
C
A
B E
104
B
Rectangle
C
105
A B
Quarré
D C
A
D
108
A B
E D C H


D
C
B
C


D N
C Z
111
A D M N
O
B C Z
112
N O P
B C D E
116
B
120
R
Q
P
O
C
A B
G
H
121
F K C
I
E D
4
H
127
C
A B
G
128
C
H
F
K E I D
D
a
132
B E C



E
F
C
A
F
B
E
135.
I
C
D
G
H
E
D
137
G
H
B
C
F
a
140.
d
c
D
C
O
141.
M
P
D
143.
C
H
B
G
E
D
144.
F
I
H
C
A
B
G
E
N
O
L
D
146
R
P
C
B
H
I
K
M





ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.

LIVRE III.

Des Rapports & des Proportions en général.

DÉFINITIONS.

175 A Comparaiſon de deux Grandeurs s'appelle *Rapport* ou *Raiſon*.

On peut faire la comparaiſon de deux Grandeurs en deux manieres ; ſçavoir, en conſidérant la quantité dont l'une ſurpaſſe l'autre, ou bien en conſidérant combien de fois l'une contient l'autre ou eſt contenue en elle.

176 En comparant deux Grandeurs comme 8 & 2, celle qu'on nomme ou qu'on écrit la premiere s'appelle *Antécédent*, & l'autre ſe nomme *Conſéquent*.

177 Lorſque l'on conſidere la quantité dont l'Antécédent ſurpaſſe le Conſéquent, cette quantité qui eſt la différence des deux Grandeurs comparées, s'ap-

pelle *Rapport arithmétique.* Ainsi pour avoir le Rapport arithmétique de deux Grandeurs telles que 8 & 2, il faut retrancher la plus petite de la plus grande; & le reste 6 est le Rapport arithmétique des deux Grandeurs.

178 Lorsque l'on considere combien de fois l'Antécédent contient le Conséquent, ou combien de fois l'Antécédent est contenu dans le Conséquent, la quantité de fois que l'un contient l'autre s'appelle *Rapport géométrique.* On peut donc avoir le Rapport géométrique de deux Grandeurs comme 8 & 2, en divisant l'une par l'autre; car le Quotient 4 de la Division exprimant combien de fois l'une de ces Grandeurs est contenue dans l'autre, sera le Rapport géométrique de ces deux Grandeurs.

Comme le Rapport géométrique est le seul dont nous ayons besoin dans ce Traité, lorsque nous nous servirons du terme de *Raison* ou de *Rapport*, nous entendrons toûjours la Raison géométrique.

179 Pour avoir le Rapport de deux Grandeurs comme 8 & 8, ou comme 8 & 2, ou comme 2 & 8, on est convenu de diviser l'Antécédent par le Conséquent.

1°. Si l'Antécédent est égal au Conséquent, comme dans le Rapport de 8 à 8, leur Rapport $\frac{8}{8}$ se nomme *Rapport d'Égalité.* Ainsi le Rapport d'égalité est toûjours l'unité.

2°. Si l'Antécédent est plus grand que le Conséquent, comme dans le Rapport de 8 à 2, leur Rapport $\frac{8}{2}$ se nomme *Rapport de grande Inégalité.* Ainsi le Rapport de grande inégalité est un nombre plus grand que l'unité.

3°. Lorsque l'Antécédent est plus petit que le Conséquent, comme dans le Rapport de 2 à 8, leur Rap-

port $\frac{2}{6}$ se nomme *Rapport de petite Inégalité*. Ainsi le Rapport de petite inégalité est un nombre moindre que l'unité.

Nous n'aurons pas besoin des termes expliqués dans cette définition. On n'en a fait mention que pour l'intelligence des Auteurs qui en font usage.

180 Lorsqu'on a deux ou plusieurs Rapports, si l'on multiplie les Antécédens ensemble, & qu'on multiplie de même les Conséquens, les deux Grandeurs qui résultent de ces Multiplications ont entr'elles un Rapport que l'on nomme *Rapport composé* de ceux dont on a multiplié les termes. Par exemple, si l'on a trois Rapports, comme ceux de 2 à 1, 3 à 7, 4 à 5, en multipliant ensemble les Antécédens 2, 3, 4, & multipliant aussi ensemble les Conséquens 1, 7, 5, on aura deux produits 24 & 35. Or le Rapport des deux nombres 24 & 35 s'appelle Rapport composé du Rapport de 2 à 1, de celui de 3 à 7, & de celui de 4 à 5. Par la même raison le Rapport de 6 à 7 est composé du Rapport de 2 à 1 & de celui de 3 à 7. Le Rapport de 12 à 35 est composé du Rapport de 3 à 7 & du Rapport de 4 à 5, ou du Rapport de 3 à 5 & du Rapport de 4 à 7. Le même Rapport de 12 à 35 est encore composé des deux Rapports de 12 à 7 & 1 à 5, ou des deux Rapports de 2 à 7 & 6 à 5, ou des trois Rapports de 2 à 1, 2 à 7, 3 à 5. Il y a beaucoup de Traités où ces façons de parler sont fort en usage: nous ne nous en servirons que rarement.

181 Deux ou plusieurs Rapports ayant les mêmes Antécédens & les mêmes Conséquens, si l'on multiplie ensemble les Antécédens, & qu'on multiplie aussi ensemble les Conséquens, les deux termes que produiront ces Multiplications auront

entr'eux un Rapport qui comparé à un des Rapports multipliés s'appelle *Rapport doublé*, si l'on a multiplié deux Rapports égaux ; ou *Rapport triplé*, si l'on a multiplié trois Rapports égaux ; ou *Rapport quadruplé*, si l'on a multiplié quatre Rapports égaux. Par exemple, le Rapport de 4 à 1 est doublé de celui de 2 à 1 ; parce qu'il est composé des deux Rapports de 2 à 1 & 2 à 1. Le Rapport de 9 à 4 est doublé de celui de 3 à 2, par la même raison.

Le rapport de 27 à 8 est triplé du rapport de 3 à 2 ; parce qu'il est composé de la Multiplication des termes des trois Rapports de 3 à 2, de 3 à 2, de 3 à 2 ; & ainsi des autres.

182 Pour que deux Rapports soient égaux, il n'est pas nécessaire qu'ils ayent des Antécédens égaux & des Conséquens égaux ; il suffit que les Antécédens contiennent également leurs Conséquens : car ce qu'on appelle proprement Rapport (*N*°. 178.) est la quantité de fois que l'Antécédent contient le Conséquent, ou le Quotient de la Division de l'Antécédent par le Conséquent. Ainsi le Rapport de 8 à 2 est égal à celui de 12 à 3.

183 Lorsque l'on compare ensemble deux Rapports égaux, leur comparaison se nomme *Proportion géométrique* ou simplement *Proportion*, si les Rapports égaux sont géométriques ; mais la comparaison se nomme *Proportion arithmétique*, si les Rapports égaux sont des Rapports arithmétiques, c'est-à-dire, si les Antécédens surpassent également leurs Conséquens, ou s'ils en sont également surpassés. Nous ne parlerons plus de cette derniere Proportion.

Les quatre termes des deux Rapports égaux que l'on compare pour faire une Proportion, peuvent être écrits de deux manieres différentes dont on va don-

ner des exemples dans la comparaiſon du Rapport de 8 à 2 avec celui de 12 à 3 qui lui eſt égal. Premièrement on peut écrire les deux Rapports de ſuite en cette maniere 8 : 2 :: 12 : 3, en mettant quatre points entre les deux Rapports égaux & deux points entre les deux termes de chaque Rapport.

Secondement on peut encore écrire les deux Rapport égaux de cette façon $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$; & cette maniere de les écrire peut paſſer pour la plus naturelle. Car puiſque le Rapport de 8 à 2 n'eſt autre choſe que $\frac{8}{2}$, que le Rapport de 12 à 3 eſt $\frac{12}{3}$ (*N°.* 178.), & que d'ailleurs ces deux Rapports ſont égaux, il eſt très-naturel de les écrire ainſi $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$.

184 Dans une Proportion géométrique quelconque repréſentée par $A : B :: C : D$, ou par $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, le premier terme A du premier Rapport s'appelle *premier Antécédent*; le ſecond terme B du premier Rapport s'appelle *premier Conſéquent*; le premier terme C du ſecond Rapport ſe nomme *ſecond Antécédent*; & le ſecond terme D du ſecond Rapport ſe nomme *ſecond Conſéquent*.

Le premier terme A & le dernier D de la Proportion s'appellent *Extrêmes*; le ſecond terme B & le troiſiéme C s'appellent *Moyens*.

185 Pour énoncer une Proportion repréſentée par $A : B :: C : D$, ou par $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, on dit : *A eſt à B comme C eſt à D*; on peut dire auſſi : A contient B autant de fois que C contient D; ou bien, A eſt contenu dans B comme C eſt contenu dans D.

186 Lorſqu'on a plus de deux Rapports égaux, par exemple, le Rapport de 12 à 3, celui de 8 à 2, celui de 20 à 5, celui de 28 à 7, &c, on les nomme des *Rapports ordonnés*, s'ils ſont diſpoſés de de la même façon, c'eſt-à-dire, ſi tous les Antécé-

dens contiennent également leurs Conséquens, ou font également contenus dans leurs Conséquens; & on peut les écrire de trois manieres différentes.

1°. On peut écrire tous les Rapports égaux de suite sous la forme de Fractions ou de Divisions à faire, en séparant ces Rapports les uns des autres par le Signe d'Egalité, comme il suit $\frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$ &c; ce qui fournit autant d'Égalités particulieres qu'il y a de façons de prendre deux à deux les Rapports égaux. Ainsi pour les quatre Rapports égaux qui servent d'exemple, on aura ces six Égalités ou Proportions.

$$\frac{12}{3} = \frac{8}{2} \qquad \frac{12}{3} = \frac{28}{7} \qquad \frac{8}{2} = \frac{28}{7}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5} \qquad \frac{8}{2} = \frac{20}{5} \qquad \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$$

2°. On pourra écrire tous les termes des Rapports égaux de suite, en séparant les deux termes de chaque Rapport par deux points, & en séparant les Rapports les uns des autres par quatre points, comme il suit 12 : 3 :: 8 : 2 :: 20 : 5 :: 28 : 7 &c; ce qui donnera autant de Proportions particulieres qu'il y aura de façons de prendre deux à deux les Rapports égaux. Ainsi les quatre Rapports égaux qu'on a pris pour exemples donneront ces six Proportions.

12 : 3 :: 8 : 2	8 : 2 :: 20 : 5
12 : 3 :: 20 : 5	8 : 2 :: 28 : 7
12 : 3 :: 28 : 7	20 : 5 :: 28 : 7

3°. On pourra écrire tous les Antécédens de suite, en les séparant les uns des autres par deux points; écrire aussi tous les Conséquens de suite, en les séparant pareillement par deux points; & séparer par quatre points la Suite des Antécédens de la Suite des

Conséquens, en observant que l'Antécédent & le Conséquent de chaque Rapport tiennent le même lieu dans les deux Suites. Ainsi les mêmes Rapports dont nous venons de parler pourront s'écrire comme il suit 12 : 8 : 20 : 28 :: 3 : 2 : 5 : 7 ; ce qui signifiera en général que les termes qui composent la premiere Suite sont proportionnels aux termes correspondans qui composent la seconde Suite.

Cette façon d'écrire les Rapports égaux est souvent très-commode, principalement lorsque les parties d'une même Figure servent d'Antécédens à des Rapports égaux, & que les parties d'une autre Figure servent de Conséquens aux mêmes Rapports égaux : parce qu'alors toutes les parties de la premiere Figure pouvant être écrites de suite, & les parties correspondantes de la seconde Figure étant pareillement écrites de suite, on distingue aisément ce qui appartient à une Figure de ce qui appartient à l'autre ; & l'on voit clairement quelles sont les parties correspondantes que l'on peut comparer dans ces deux Figures, & dont on peut former des Proportions.

Par exemple, si deux Figures *ABCDE*, *MNOPQ*, ont leurs côtés proportionnels, c'est-à-dire, si Fig. 147 & 148.

AB : *MN* :: *BC* : *NO*
BC : *NO* :: *CD* : *OP*
CD : *OP* :: *DE* : *PQ* &c.

On écrira de suite les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c de la premiere Figure, qui servent d'Antécédens aux Rapports égaux, & l'on écrira pareillement de suite les côtés *MN*, *NO*, *OP*, *PQ*, &c. de la seconde Figure, qui servent de Conséquens aux mêmes Rapports égaux, en observant que les côtés correspon-

dans tiennent le même lieu dans les deux Suites : & l'on aura $AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c. Comme il est important de faire attention à cette maniere d'écrire les Rapports égaux, & aux différentes Proportions qu'on en peut tirer, nous ferons encore remarquer que les deux Suites de proportionnelles $AB : BC : CD : DE :: MN : NO : OP : PQ$, composées chacune de quatre termes, fournissent les six Proportions suivantes :

$AB : MN :: BC : NO$ $\quad$ $BC : NO :: CD : OP$

$AB : MN :: CD : OP$ $\quad$ $BC : NO :: DE : PQ$

$AB : MN :: DE : PQ$ $\quad$ $CD : OP :: DE : PQ$

Fig. 149 & 150. 187 Lorsque deux Figures X & Z sont telles que le côté AB de la premiere est au côté MN de la seconde, comme le côté BC de la premiere est au côté NO de la seconde, on dit que ces deux Figures X & Z ont deux côtés *directement proportionnels* ou simplement *proportionnels* ; & si tous les côtés de la premiere ont même Rapport avec tous les côtés de la seconde, on dit que ces deux Figures ont tous les côtés proportionnels.

Donc lorsque deux Figures X & Z ont deux côtés proportionnels, par exemple, si $AB : MN :: BC : NO$, ou qu'elles ont tous les côtés en même Rapport, savoir, $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: PA : PM$, les côtés de la premiere X sont les Antécédens d'une Suite de Rapports égaux ordonnés ; & les côtés de la seconde Z sont les Conséquens des mêmes Rapports.

Fig. 151 & 152. 188 Si deux Figures X & Z sont telles qu'un côté AB de la premiere soit au côté MN de la seconde, comme un côté NO de la seconde est à un côté

BC

BC de la premiere, on dit que les Figures *X* & *Z* ont deux côtés *réciproquement proportionnels* ou *réciproques*.

Ainsi lorsque deux Figures *X* & *Z* ont deux côtés réciproques, c'est-à-dire, lorsque *AB*: *MN*::*NO*: *BC*, les côtés *A B*, *BC*, de la premiere, sont les Extrêmes de la Proportion, & les côtés *MN*, *NO*, de la seconde, sont les Moyens de la même Proportion.

189 Lorsque trois Grandeurs, comme 2, 10, 50, sont telles que la premiere est à la seconde comme la seconde à la troisiéme, la Proportion que l'on fait avec ces trois Grandeurs s'appelle *Proportion continue*; & au lieu d'écrire 2 : 10 :: 10 : 50, on écrit ∺ 2: 10: 50.

Si l'on a plus de trois Grandeurs telles que la premiere soit à la seconde comme la seconde à la troisiéme, comme la troisiéme à la quatriéme, &c. c'est-à-dire, si chaque terme contient également le terme qui le suit, ou est également contenu dans celui qui le suit, toutes ces Grandeurs sont une *Progression géometrique* qu'on appelle simplement *Progression*. Ainsi 16, 8, 4, 2, 1, &c ou 1, 2, 4, 8, 16, &c sont une Progression géométrique que l'on écrit ainsi ∺ 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : &c ou ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16: &c; la premiere est une Progression décroissante, & l'autre est une Progression croissante.

COROLLAIRE.

190 Donc si l'on compare une même Grandeur à deux Grandeurs égales, ou deux Grandeurs égales à une même Grandeur ou à des Grandeurs égales, les deux Rapports seront égaux. Car les Grandeurs égales contiendront également la même Grandeur ou les Grandeurs égales avec lesquelles on les comparera, ou bien seront également contenues en elles.

Et réciproquement deux Grandeurs seront égales, quand en les comparant à une même Grandeur ou à des Grandeurs égales, elles feront des Rapports égaux, c'est-à-dire, une Proportion géométrique. Par exemple, les deux quantités A & B seront égales, si $A:C::B:C$.

Axiomes.

191 I. Si deux Grandeurs A & B sont multipliées par une même Grandeur, les produits qui résulteront de la multiplication seront dans le même rapport que les Grandeurs A & B qu'on a multipliées. Par exemple, $A:B::2A:2B::3A:3B::4A:4B$ &c. c'est-à-dire, que $\frac{A}{B}=\frac{2A}{2B}=\frac{3A}{3B}=\frac{4A}{4B}$ &c.

192 II. Et par conséquent, si deux Grandeurs A & B sont divisées par une même quantité, les quotiens seront dans le même Rapport que les Grandeurs A & B; c'est-à-dire, qu'on aura $A:B::\frac{1}{2}A:\frac{1}{2}B::\frac{1}{3}A:\frac{1}{3}B$ &c. ou $\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}B}=\frac{\frac{1}{3}A}{\frac{1}{3}B}$ &c.

Théorême.

Fig. 153. 193 *Si deux Parallélogrammes* AC, DE, *sont compris entre les mêmes Paralléles* AF, BE, *ils sont dans le même rapport que les portions* BC, CE, *de la Parallele qui leur sert de base; c'est-à-dire, que* AC : DE : : BC : CE.

Démonstration.

Puisque les Parallélogrammes AC, DE, sont compris entre les mêmes Paralléles, ils ont la même hauteur exprimée par la distance AM des deux Paralléles entre lesquelles ils sont compris.

Donc (*N*°. 142.) le Parallélogramme $AC=BC\times AM$ & le Parallélogramme $DE=CE\times AM$.

Mais $BC \times AM : CE \times AM :: BC : CE$ (N°. 191.).

Donc $AC : DE :: BC : CE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce Théorême est évident par lui-même. Car les deux Parallélogrammes étant compris entre les mêmes Parallèles, il est clair qu'on trouvera dans AC *autant de Parallélogrammes égaux à* DE, *qu'on trouvera dans* BC *de parties égales à* CE; *& par conséquent* AC *contient* DE *autant de fois que* BC *contient* CE, *c'est-à-dire, que* AC : DE :: BC : CE.

COROLLAIRE.

194 Donc les Triangles BAC, CAE, qui ont leurs bases BC, CE, en Ligne droite, & leur Sommet au même Point, c'est-à-dire, qui ont même hauteur, sont entr'eux dans le même rapport que leurs bases BC, CE. Car ces Triangles étant les moitiés des Parallélogrammes $ABCD$, $DCEF$, qui ont même hauteur, sont entr'eux comme ces Parallélogrammes. Mais ces Parallélogrammes sont entr'eux comme leurs bases BC, CE. Donc on aura aussi $BAC : CAE :: BC : CE$. Fig. 154.

THÉORÊME.

195 *Deux Parallélogrammes ou deux Triangles* X *&* Z *sont égaux, quand ils ont un Angle égal entre deux côtés réciproques.* Fig. 155, 156 & 157.

Il faut démontrer que $X = Z$ si l'Angle $ABE = DBC$, & si $AB : BC :: DB : BE$.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'Angle $ABE = DBC$, on pourra les opposer par leur Sommet, & par conséquent faire en sorte que les côtés AB, BC, que l'on compare en-

ſemble, ſoient en Ligne droite; & que les côtés DB, BE, que l'on compare enſemble, ſoient auſſi en Ligne droite. Cela poſé, l'on aura

1°. $X:Y::AB:BC$ (*N°.* 193 *ou* 194.).

2°. $AB:BC::DB:BE$ (*hyp.*).

3°. (*N°.* 193 *ou* 194.) $DB:BE::Z:Y$.

Donc $X:Y::Z:Y$; & par conſéquent $X=Z$, puiſqu'ils contiennent également Y ou qu'ils ſont également contenus en Y. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

Fig. 157. **196** Donc dans une Proportion géométrique, telle que $AB:BC::DB:BE$, le produit $AB\times BE$ des Extrêmes eſt égal au produit $BC\times DB$ des Moyens. Car ſi l'on fait un Rectangle X qui ait les deux Extrêmes AB, BE, pour côtés contigus, & un autre Rectangle Z qui ait les Moyens BC, DB, pour côtés contigus, ces deux Figures auront un Angle égal compris entre des côtés réciproques; & par conſéquent on aura $X=Z$ (*N°.* 195.).

Mais (*N°.* 143.) le Rectangle $X=AB\times BE$ produit des Extrêmes, & le Rectangle $Z=DB\times BC$ produit des Moyens. Donc dans une Proportion géométrique, le produit des Extrêmes eſt égal au produit des Moyens.

Corollaire II.

197 Puiſque la Proportion $AB:BC::DB:BE$ donne $AB\times BE=BC\times DB$;

1°. En diviſant chaque membre par AB, on aura $BE=\frac{BC\times DB}{AB}$; d'où l'on voit que ſi l'on connoît les trois premiers termes AB, BC, DB, d'une Proportion, on aura le quatriéme BE en multipliant les deux Moyens BC, DB, l'un par l'autre, & en diviſant le produit par le premier Extrême AB.

2°. En divisant chaque membre par BE, on aura $AB = \frac{BC \times DB}{BE}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les les trois derniers termes BC, DB, BE, d'une Proportion, l'on aura le premier AB en multipliant les deux Moyens BC, DB, l'un par l'autre, & en divisant le produit par le dernier Extrême BE.

3°. En divisant chaque membre par BC, on aura $DB = \frac{AB \times BE}{BC}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les Extrêmes & le premier Moyen d'une Proportion, l'on aura le second Moyen en multipliant les deux Extrêmes l'un par l'autre, & en divisant le produit par le premier Moyen.

4°. En divisant chaque membre par DB, on aura $BC = \frac{AB \times BE}{DB}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les Extrêmes & le second Moyen d'une Proportion, l'on aura le premier Moyen en multipliant les deux Extrêmes l'un par l'autre, & en divisant le produit par le second Moyen.

Avertissement.

Lorsque quatre termes AB, BC, DB, BE, sont tels que le premier AB est plus grand par rapport au second BC, que le troisiéme DB par rapport au quatriéme BE; c'est-à-dire, lorsque le premier terme est trop grand pour que les quatre termes soient en Proportion géométrique, on les écrit ainsi $AB : BC > DB : BE$, ou $\frac{AB}{BC} > \frac{DB}{BE}$: ce qui signifie que le Rapport de AB à BC est plus grand que le Rapport de DB à BE.

Si au contraire le premier terme AB est trop petit pour que les quatre termes AB, BC, DB, BE, soient en Proportion géométrique, on les écrit ainsi $AB : BC < DB : BE$, ou $\frac{AB}{BC} < \frac{DB}{BE}$: ce qui signifie que le Rapport de AB à BC est plus petit que le Rapport de DB à BE.

Corollaire III.

Fig. 158. 198 Si la Raison de AB à BC est plus grande que la Raison de DB à BE, c'est-à-dire, si $AB : BC > DB : BE$, le Parallélogramme AE qui aura pour côtés contigus les Extrêmes, sera plus grand que le Parallélogramme équiangle DC qui aura pour côtés contigus les Moyens : & par conséquent le Rectangle AE égal au produit $AB \times BE$ des Extrêmes, sera plus grand que le Rectangle DC égal au produit $BC \times DB$ des Moyens.

Car si du premier terme AB l'on retranche une partie AI, telle que le reste IB soit en proportion avec les trois autres termes, de maniere que l'on ait $IB : BC :: DB : BE$, & que l'on mene IF paralléle à DBE, l'on aura (*N°*. 195.) $IE = DC$. Mais puisque (*hyp.*) $AB > IB$, l'on aura aussi $AE > IE$; & par conséquent $AE > DC$.

On peut encore démontrer le même Corollaire comme il suit.

$AE : BH :: AB : BC$ (*N°*. 193.).

$AB : BC > DB : BE$ (*hyp.*).

Et (*N°*. 193.) $DB : BE :: DC : BH$.

Donc $AE : BH > DC : BH$; & par conséquent $AE > DC$.

Corollaire IV.

Fig. 159. 199 Au contraire, si la Raison de AB à BC est moindre que celle de DB à BE, c'est-à-dire, si $AB : BC < DB : BE$, le Parallélogramme AE qui aura pour côtés contigus les Extrêmes, sera moindre que le Parallélogramme équiangle DC qui aura pour côtés contigus les Moyens; & par conséquent le Rectangle AE égal au produit $AB \times BE$ des Extrêmes, sera moindre que le Rectangle DC égal au produit $BC \times DB$ des Moyens.

Car si AB, qu'on suppose trop petit, est alongé d'une quantité AL, telle que l'on ait $LB : BC :: DB : BE$, & qu'on mene LM paralléle à BE, l'on aura (*N°*. 195.) $LE = DC$. Mais $AE < LE$. Donc aussi $AE < DC$.

THÉORÉME.

200 *Lorsque deux Parallélogrammes ou deux Triangles* X, Z, *sont égaux, & qu'ils ont un Angle égal, ils ont toûjours leurs côtés réciproques autour de l'Angle égal.* Fig. 155, 156 & 157.

C'est-à-dire, que si X=Z, *& si l'Angle* ABE=DBC, *on aura* AB : BC :: DB : BE.

DÉMONSTRATION.

Puisque les Angles ABE, DBC, sont égaux, on pourra les opposer par leur Sommet; & les côtés AB, DB, seront en Ligne droite avec les côtés BC, BE. Cela posé, on aura

1°. $AB : BC :: X : Y$ (*N°*. 193 *ou* 194.).

2°. (*N°*. 190.) $X : Y :: Z : Y$, puisque $X = Z$.

3°. (*N°*. 193 *ou* 194.) $Z : Y :: DB : BE$.

Donc $AB : BC :: DB : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

201 Nous avons vû (*N°*. 196.) que dans une Proportion géométrique $AB : BC :: DB : BE$, le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est égal au produit $BC \times DB$ des Moyens. On va maintenant conclurre du Théorême précédent que quatre termes AB, BC, DB, BE, seront en Proportion, si $AB \times BE$ produit des Extrêmes est égal à $DB \times BC$ produit des Moyens. Fig. 157.

Pour le démontrer, soit fait un Rectangle X qui ait les Extrêmes AB, BE, pour côtés contigus; soit

aussi fait un Rectangle Z qui ait les Moyens DB, BC, pour côtés contigus : on aura (*N°.* 143.) 1°. $X = AB \times BE$; 2°. $Z = DB \times BC$.

Et puisqu'on suppose $AB \times BE = DB \times BC$, on aura $X = Z$.

Mais les deux Rectangles égaux X & Z ayant les Angles égaux, ont les côtés réciproques (*N°.* 200.). Donc $AB : BC :: DB : BE$.

COROLLAIRE II.

Fig. 158. 202 Si les quatre termes AB, BC, DB, BE, sont tels que le Parallélogramme AE qui a pour côtés contigus les Extrêmes, soit plus grand que le Parallélogramme équiangle DC qui a pour côtés contigus les Moyens, ou que le produit $AB \times BE$ des Extrêmes soit plus grand que le produit $BC \times DB$ des Moyens, le Rapport de AB à BC sera plus grand que le Rapport de DB à BE; c'est-à-dire, que l'on aura $AB : BC > DB : BE$.

Car si $AE > DC$, soit menée parallélement à BE une Droite IF qui retranche de AE une partie AF dont AE est plus grand que DC; l'on aura $IE = DC$: & par conséquent (*N°.* 200.) $IB : BC :: DB : BE$. Donc puisque $AB > IB$, on aura $AB : BC > DB : BE$.

On peut encore démontrer ce Corollaire comme il suit.

$AB : BC :: AE : BH$ (*N°.* 193.).

$AE : BH > DC : BH$, parce qu'on suppose $AE > DC$.

Et (*N°.* 193.) $DC : BH :: DB : BE$.

Donc $AB : BC > DB : BE$.

COROLLAIRE III.

Fig. 159. 203 Si au contraire le Parallélogramme AE qui

a pour côtés contigus les Extrêmes, eſt moindre que le Parallélogramme équiangle *DC* qui a pour côtés contigus les Moyens, ou ſi le produit $AB \times BE$ des Extrêmes eſt moindre que le produit $BC \times DB$ des Moyens, on aura $AB : BC < DB : BE$.

Car ſi $AE < DC$, ajoûtons à *AE* une quantité *AM* telle que *LE* ſoit un Parallélogramme égal à *DC*; l'on aura (*N*°. 200.) $LB : BC :: DB : BE$. Donc puiſque $AB < LB$, l'on aura $AB : BC < DB : BE$.

On pourroit donner de ce Corollaire une nouvelle Démonſtration ſemblable à la ſeconde du Corollaire précédent.

RÉGLES DES PROPORTIONS.

Ces Régles conſiſtent dans quelques changemens qu'on peut faire aux termes d'une Proportion, ou dans la combinaiſon de deux ou de pluſieurs Proportions, de maniere qu'il réſulte toûjours une Proportion.

PREMIERE REGLE.

204 *Si l'on a une Proportion, par exemple* AB : BC : : DB : BE, *on pourra la changer en celle-ci* BC : AB : : BE : DB, *ou en celle-ci* BE : DB : : BC : AB.

Ce changement ſe nomme INVERTENDO.

DÉMONSTRATION.

Cette Régle eſt évidente ; car ſi *AB* contient *BC* autant de fois que *DB* contient *BE*, il faut néceſſairement que *BC* ſoit contenu dans *AB* autant de fois que *BE* eſt contenu dans *DB*.

On peut encore démontrer cette premiere Régle, comme il ſuit.

Puiſque (*hyp.*) $AB : BC :: DB : BE$, on aura (*N°*. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$. Donc les quatre termes BC, AB, BE, DB, ou BE, DB, BC, AB, ſont en Proportion géométrique (*N°*. 201.); puiſque le produit de leurs Extrêmes eſt égal au produit de leurs Moyens.

REMARQUE.

Fig. 158. 205 1°. On remarquera que ſi l'on avoit

$$AB : BC > DB : BE,$$

on auroit auſſi *Invertendo* $BE : DB > BC : AB$.

Car les Extrêmes & les Moyens ſont les mêmes dans ces deux arrangemens; & comme (*N°*. 198.) le produit $AB \times BE$ des Extrêmes eſt plus grand que le produit $BC \times DB$ des Moyens dans le premier arrangement, le produit des Extrêmes ſera auſſi plus grand que le produit des Moyens dans le ſecond arrangement. Ainſi l'on aura (*N°*. 202.) $BE : DB > BC : AB$.

2°. On doit encore remarquer que ſi l'on avoit $AB : BC > DB : BE$, l'on auroit au contraire *Invertendo* $BC : AB < BE : DB$.

Car les termes AB, BE, qui ſont Extrêmes dans le premier arrangement, deviendroient Moyens dans le ſecond arrangement; & ceux qui ſont Moyens dans le premier arrangement deviendroient Extrêmes dans le ſecond. Mais dans le premier arrangement le produit $AB \times BE$ des Extrêmes eſt plus grand que le produit $BC \times DB$ des Moyens. Donc dans le ſecond arrangement le produit des Extrêmes ſeroit moindre que le produit des Moyens. Ainſi (*N°*. 203.) l'on auroit $BC : AB < BE : DB$.

On démontrera de la même maniere que ſi l'on avoit $AB : BC < DB : BE$, *l'on trouveroit* INVERTENDO

$$BE : DB < BC : AB.$$
$$BC : AB > BE : DB.$$

DEUXIÉME REGLE.

206 *Si l'on a une Proportion géométrique, par exemple* AB : BC :: DB : BE, *on pourra la changer en celle-ci* AB : DB :: BC : BE.

Ce changement s'appelle ALTERNANDO.

DÉMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) les quatre termes *AB*, *BC*, *DB*, *BE*, sont en proportion, le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est égal au produit $DB \times BC$ des Moyens (*No*. 196.). Mais dans le changement que l'on fait, on a les mêmes Extrêmes & les mêmes Moyens que dans la Proportion supposée par l'hypothèse. Ainsi dans le nouvel arrangement *AB*, *DB*, *BC*, *BE*, le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens ; & par conséquent (*No*. 201.) ces quatre termes sont en Proportion géométrique. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

207 On a vû (*No*. 186.) que les deux Suites *AB* : *BC* : *CD* : *DE* : &c :: *MN* : *NO* : *OP* : *PQ* : &c qui sont séparées par quatre Points, & dont les termes sont séparés les uns des autres par deux Points, représentent des Rapports égaux dont les Antécédens composent la premiere Suite, & dont les Conséquens composent la seconde Suite ; en sorte qu'on peut en faire autant de Proportions particulieres qu'il y a de manieres de prendre deux à deux les termes de chaque Suite. Ainsi dans l'exemple proposé, où chaque Suite est composée de quatre termes, on peut faire les six Proportions suivantes,

AB : *MN* :: *BC* : *NO*   *BC* : *NO* :: *CD* : *OP*
AB : *MN* :: *CD* : *OP*   *BC* : *NO* :: *DE* : *PQ*
AB : *MN* :: *DE* : *PQ*   *CD* : *OP* :: *DE* : *PQ*

Mais toutes ces Proportions étant alternées par la Régle qu'on vient d'expliquer, donneront les six Proportions suivantes.

AB:*BC*::*MN*:*NO* *BC*:*CD*::*NO*:*OP*

AB:*CD*::*MN*:*OP* *BC*:*DE*::*NO*:*PQ*

AB:*DE*::*MN*:*PQ* *CD*:*DE*::*OP*:*PQ*

Donc dans les deux Suites de proportionnelles *AB* : *BC* : *CD* : *DE* : &c : : *MN* : *NO* : *OP* : *PQ* : &c, d'où l'on peut tirer autant de Proportions particulieres qu'il y a de manieres de prendre deux à deux les termes de chaque Suite, on pourra prendre les deux premiers termes de chaque Proportion dans la premiere Suite, & les deux derniers termes de chaque Proportion dans la seconde Suite; en observant de prendre pour chaque Proportion des termes correspondans dans les deux Suites, comme on le voit dans les six Proportions qu'on a trouvées en alternant.

Corollaire II.

208 Si plusieurs Proportions ont les mêmes Antécédens, comme celles-ci { *AB* : *BC* : : *MN* : *NO*, *AB* : *CD* : : *MN* : *OP*, *AB* : *DE* : : *MN* : *PQ* &c. }

on en pourra faire ces deux Suites de proportionnelles *AB* : *BC* : *CD* : *DE* : &c : : *MN* : *NO* : *OP* : *PQ* : &c, dont la premiere sera composée d'un premier Antécédent & de tous les premiers Conséquens, & dont la seconde sera composée d'un second Antécédent & de tous les seconds Conséquens.

Car alternant les Proportions données qui ont les mêmes Antécédens,

on aura celles-ci $\begin{cases} AB : MN :: BC : NO \\ AB : MN :: CD : OP \\ AB : MN :: DE : PQ \text{ \&c.} \end{cases}$

dont tous les Rapports sont égaux à celui de AB à MN, & par conséquent égaux entr'eux.

On aura donc $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ ::$ &c; & écrivant les Antécédens dans une Suite, & les Conséquens dans une autre Suite (*N°*. 186.), on aura enfin $AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c.

REMARQUE.

209 On doit remarquer que si l'on avoit Fig. 158.

$$AB : BC > DB : BE$$

on auroit aussi *Alternando* $AB : DB > BC : BE$.

On démontrera cette Remarque comme celle de la premiere Regle (*N°*. 205.).

On fera voir aussi que si l'on avoit $AB : BC < DB : BE$, *l'on trouveroit* Alternando $AB : DB < BC : BE$.

TROISIÈME REGLE.

210 *Si l'on a une Proportion géométrique, telle que celle-ci* $AB : BC :: DB : BE$, *on pourra la changer en celle-ci* $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$.

Ce changement s'appelle COMPONENDO.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que ces quatre nouveaux termes sont en proportion, il suffit (*N°*. 201.) de faire voir que le produit de leurs Extrêmes est égal au produit

de leurs Moyens, c'est-à-dire, que l'on aura $AB \times BE + BC \times BE = BC \times DB + BC \times BE$: & comme ces deux produits ont une partie commune $BC \times BE$, il suffira de faire voir que les deux autres parties $AB \times BE$, $BC \times DB$, de ces produits, sont égales. Or puisque (*hyp.*) $AB : BC :: DB : BE$, on aura (*N*°. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$. Donc la Proportion supposée $AB : BC :: DB : BE$ peut être changée en celle-ci $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Fig. 157. Puisque $AB : BC :: DB : BE$ (*hyp.*), si l'on fait un Rectangle AE qui ait pour côtés les Extrêmes AB, BE, de la Proportion, & un Rectangle DC qui ait pour côtés les Moyens BC, DB, on aura $AE = DC$ (*N*°. 195.); & ajoûtant BH à chaque membre on aura $AH = DH$. Mais

1°. $AC : BC :: AH : BH$ (*N*°. 193.).
2°. $AH : BH :: DH : BH$ (*N*°. 190.).
3°. (*N*°. 193.) $DH : BH :: DE : BE$.

Donc $AC : BC :: DE : BE$, c'est-à-dire, $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lorsque deux Droites AC, DE, *seront coupées proportionnellement, c'est-à-dire, lorsque la premiere partie* AB *de la premiere Ligne sera à sa seconde partie* BC, *comme la premiere partie* DB *de la seconde Ligne à sa seconde partie* BE, *nous nous servirons de cette troisiéme Regle pour conclurre que la premiere Ligne* AC *est à sa seconde partie* BC, *comme la seconde Ligne* DE *est à sa seconde partie* BE.

REMARQUE.

211 Il eſt à propos de remarquer que ſi l'on avoit $AB:BC > DB:BE$, l'on auroit auſſi *Componendo* $AB+BC:BC > DB+BE:BE$.

Car dans le premier arrangement on a (*N°*. 198.) $AB \times BE > BC \times DB$. Ainſi en ajoûtant à chaque membre $BC \times BE$, on trouvera que $AB \times BE + BC \times BE$, qui eſt le produit des Extrêmes dans le ſecond arrangement, eſt plus grand que $BC \times DB + BC \times BE$ qui eſt le produit des Moyens dans le même ſecond arrangement. Donc (*N°*. 205.) $AB+BC:BC > DB+BE:BE$.

On prouvera de la même maniere que ſi l'on avoit $AB:BC < DB:BE$, *l'on auroit auſſi* Componendo. $AB+BC:BC < DB+BE:BE$.

QUATRIÉME REGLE.

212 *Si l'on a une Proportion géométrique telle que* $AB:BC::DB:BE$, *on pourra la changer en celle-ci* $AB+BC:AB::DB+BE:DB$.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que ce changement donne encore une Proportion, il ſuffit (*N°*. 201.) de faire voir que le produit des Extrêmes eſt égal à celui des Moyens, c'eſt-à-dire, que $AB \times DB + BC \times DB = AB \times DB + AB \times BE$.

1°. Il eſt évident que $AB \times DB = AB \times DB$.

2°. Puiſque (*hyp.*) $AB:BC::DB:BE$, on aura $BC \times DB = AB \times BE$ (*N°*. 196.).

Donc $AB+BC:AB::DB+BE:DB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Fig. 155 & 157. Puisque (*hyp.*) $AB : BC :: DB : BE$, on aura $AE = DC$ (*N°*. 195.). Ajoûtant BH à chaque membre, on aura $AH = DH$; & en comparant ces deux Égalités, on aura $AH : AE :: DH : DC$. Mais

1°. $AC : AB :: AH : AE$ (*N°*. 193.).

2°. On a vû que $AH : AE :: DH : DC$.

3°. (*N°*. 193.) $DH : DC :: DE : DB$.

Donc $AC : AB :: DE : DB$, c'est-à-dire, que $AB + BC : AB :: DB + BE : DB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lorsque deux Lignes AC, DE, *seront coupées en parties proportionnelles, c'est-à-dire, de maniere que la premiere partie* AB *de la premiere Ligne soit à sa seconde partie* BC, *comme la premiere partie* DB *de la seconde Ligne est à sa seconde partie* BE, *nous nous servirons souvent de cette quatriéme Régle pour démontrer que la premiere Ligne entiere* AC *est à sa premiere partie* AB, *comme la seconde Ligne entiere* DE *est à sa premiere partie* DB.

Remarque.

213 Il faut remarquer que si l'on avoit

$$AB : BC > DB : BE$$

on trouveroit $AB + BC : AB < DB + BE : DB$.

Car le premier arrangement donneroit (*N°*. 198.) $BC \times DB < AB \times BE$; & ajoûtant $AB \times DB$ à chaque membre, on trouveroit que $AB \times DB + BC \times DB$ produit des Extrêmes dans le second arrangement, seroit plus petit que $AB \times DB + AB \times BE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi (*N°*. 205.) $AB + BC : AB < DB + BE : DB$.

On démontrera de la même maniere que si l'on avoit $AB : BC < DB : BE$, *l'on trouveroit au contraire* $AB + BC : AB > DB + BE : DB$.

CINQUIÉME

CINQUIÈME REGLE.

214 *Si l'on a une Proportion géométrique* AB : DB :: BC : BE, *on pourra la changer en celle-ci* AB+BC : DB+BE :: BC : BE *ou* :: AB : DB; *c'est-à-dire, que la somme des Antécédens sera à la somme des Conséquens, comme un Antécédent à son Conséquent.*

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes $(AB+BC)$, $(DB+BE)$, BC, BE, sera $AB \times BE + BC \times BE$; & le produit de leurs Moyens sera $DB \times BC + BE \times BC$.

Mais puisque (*hyp.*) $AB : DB :: BC : BE$, on a (*N*o. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$, & les deux produits $BC \times BE$, $BE \times BC$, sont identiques. Donc le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes est égal au produit de leurs Moyens; & par conséquent (*N*o. 201.) ces quatre termes sont en Proportion géométrique, c'est-à-dire, que $AB+BC : DB+BE :: BC : BE$ ou :: $AB : DB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque $AB : DB :: BC : BE$, on aura *Alternando* (*N*o. 206.) $AB : BC :: DB : BE$.

Changeant cette Proportion *Componendo* (*N*o. 210.) on aura $AB+BC : BC :: DB+BE : BE$.

Changeant encore cette derniere Proportion *Alternando*, l'on aura $AB+BC : DB+BE :: BC : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

215 Donc si l'on a un nombre quelconque de Rapports égaux tels que ceux-ci
$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c.

La somme de deux Antécédens quelconques sera à la somme de leurs Conséquens, comme l'Antécédent de l'un des Rapports égaux est à son Conséquent.

Ou si les Rapports égaux sont écrits en deux Suites $AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$, la somme de deux termes quelconques de la premiere Suite de proportionnelles, sera à la somme de deux termes correspondans de la seconde Suite, comme un terme de la premiere Suite est au terme correspondant de la seconde Suite. Car les Rapports égaux $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c, & les deux Suites de proportionnelles $AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$, donneront les Proportions suivantes.

$AB : MN :: BC : NO$. $BC : NO :: CD : OP$.
$AB : MN :: CD : OP$. $BC : NO :: DE : PQ$.
$AB : MN :: DE : PQ$. $CD : OP :: DE : PQ$.
&c.

Donc puisque (*N*°. 214.) la somme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique est à la somme de ses deux Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent, on aura

$$AB + BC : MN + NO :: AB : MN$$
$$AB + CD : MN + OP :: AB : MN$$
$$AB + DE : MN + PQ :: AB : MN$$
$$BC + CD : NO + OP :: BC : NO$$
$$BC + DE : NO + PQ :: BC : NO$$
$$CD + DE : OP + PQ :: CD : OP \text{ ou } :: DE : PQ$$
&c.

Mais (*hyp.*) tous les seconds Rapports de ces dernieres Proportions sont égaux, c'est-à-dire, que $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c.

$$\text{Donc}\left\{\begin{array}{l} AB+BC : MN+NO \\ AB+CD : MN+OP \\ AB+DE : MN+PQ \\ BC+CD : NO+OP \\ BC+DE : NO+PQ \\ CD+DE : OP+PQ \\ \&c. \end{array}\right\} :: AB:MN \text{ ou } :: BC:NO \text{ ou } :: CD:OP \text{ ou } :: DE:PQ \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE II.

216 Lorſqu'on a pluſieurs Rapports égaux tels que $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c, la ſomme de trois Antécédens quelconques eſt à la ſomme de leurs Conſéquens, comme un Antécédent eſt à ſon Conſéquent.

Ou ſi les Rapports égaux ſont écrits en deux Suites $AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c,

La ſomme de trois termes quelconques de la premiere Suite, eſt à la ſomme de trois termes correſpondans de la ſeconde Suite, comme un terme quelconque de la premiere Suite eſt au terme correſpondant de la ſeconde.

Car les Rapports égaux ou les deux Suites de proportionnelles donneront (N°. 215.)

$$AB+BC : MN+NO :: CD : OP$$
$$AB+BC : MN+NO :: DE : PQ$$
$$BC+CD : NO+OP :: DE : PQ$$

Mais (N°. 214.) la ſomme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique eſt à la ſomme de ſes deux Conſéquens, comme un Antécédent eſt à ſon Conſéquent. On aura donc

$$AB+BC+CD : MN+NO+OP :: CD : OP$$
$$AB+BC+DE : MN+NO+PQ :: DE : PQ$$
$$BC+CD+DE : NO+OP+PQ :: DE : PQ$$

Mais (*hyp.*) les ſeconds Rapports de ces Proportions ſont égaux entr'eux & aux Rapports de AB à MN, de BC à NO, &c ; c'eſt-à-dire, que
$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c.

$$\text{Donc}\left\{\begin{array}{l} AB+BC+CD : MN+NO+OP \\ AB+BC+DE : MN+NO+PQ \\ BC+CD+DE : NO+OP+PQ \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} :: AB:MN \text{ ou } :: BC:NO \text{ ou } :: CD:OP \text{ ou } :: DE:PQ \text{ \&c.}$$

Corollaire III.

217 Si l'on a un nombre quelconque de Rapports égaux $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c, on démontrera de la même maniere que la ſomme de quatre Antécédens ou d'un nombre quelconque d'Antécédens, eſt à la ſomme de leurs Conſéquens, comme un ſeul Antécédent eſt à ſon Conſéquent.

Et ſi les Rapports égaux ſont écrits en deux Suites $AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c, on fera voir que la ſomme de quatre termes ou d'un nombre quelconque de termes de la premiere Suite de proportionnelles eſt à la ſomme des termes correſpondans de la ſeconde Suite, comme un terme quelconque de la premiere Suite eſt au terme correſpondant de la ſeconde.

Enfin l'on démontrera que la ſomme de tous les Antécédens des Rapports égaux eſt à la ſomme de tous leurs Conſéquens, comme un Antécédent eſt à ſon Conſéquent ; ou que la ſomme des termes qui compoſent une premiere Suite de proportionnelles, eſt à la ſomme des termes qui compoſent la ſeconde Suite, comme un terme quelconque de la premiere Suite eſt au terme correſpondant de la ſeconde.

Car les Rapports égaux
$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c
& les deux Suites de proportionnelles
$AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c

donneront (N°. 216.)

$AB+BC+CD : MN+NO+OP :: DE : PQ$.

Mais (N°. 214.) la ſomme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique eſt à la ſomme de ſes deux Conſéquens, comme un Antécédent eſt à ſon Conſéquent.

Donc $AB+BC+CD+DE : MN+NO+OP+PQ :: DE : PQ$.

Et comme (*hyp.*) le Rapport de DE à PQ eſt égal aux Rapports de AB à MN, de BC à NO, de CD à OP, on aura

$$AB+BC+CD+DE : MN+NO+OP+PQ :: \begin{cases} AB : MN \\ BC : NO \\ CD : OP \\ DE : PQ \end{cases}$$

COROLLAIRE IV.

218 Puiſque pluſieurs Rapports égaux $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c ou deux Suites de proportionnelles $AB : BC : CD : DE :$ &c $:: MN : NO : OP : PQ :$ &c donnent (N°. 215.)

$AB+BC : MN+NO$
$AB+CD : MN+OP$
$AB+DE : MN+PQ$
$BC+CD : NO+OP$
$BC+DE : NO+PQ$
$CD+DE : OP+PQ$
&c.

& donnent (N°. 216.)

$AB+BC+CD : MN+NO+OP$
$AB+BC+DE : MN+NO+PQ$
$BC+CD+DE : NO+OP+PQ$
&c.

& donnent (N°. 217.)

$AB+BC+CD+DE : MN+NO+OP+PQ$

(toutes ces proportions, réunies par une accolade :) $:: AB : MN$ ou $:: BC : NO$ ou $:: CD : OP$ ou $:: DE : PQ$ &c.

Il eſt clair que la ſomme de tant d'Antécédens qu'on voudra, ſera à la ſomme de leurs Conſéquens;

comme une autre somme quelconque d'Antécédens est à la somme de leurs Conséquens.

Ou si l'on a deux Suites de proportionnelles, la somme de tant de termes qu'on voudra de la premiere Suite sera à la somme des termes correspondans de la seconde Suite, comme une autre somme de termes de la premiere Suite, est à la somme de leurs termes correspondans dans la seconde Suite ; c'est-à-dire, que l'on aura

$$AB+BC : MN+NO :: AB+CD : MN+OP$$
$$:: AB+DE : MN+PQ :: BC+CD : NO+OP$$
$$:: BC+DE : NO+PQ :: CD+DE : OP+PQ$$
$$:: AB+BC+CD : MN+NO+OP$$
$$:: AB+BC+DE : MN+NO+PQ$$
$$:: BC+CD+DE : NO+OP+PQ$$
$$:: AB+BC+CD+DE : MN+NO+OP+PQ \text{ \&c.}$$

REMARQUE.

219 On remarquera que si l'on avoit

$$AB : DB > BC : BE$$

On auroit $\begin{cases} AB+BC : DB+BE > BC : BE \\ AB+BC \ \ DB+BE < AB : DB \end{cases}$

Car le premier arrangement que l'on suppose donneroit (*N*°. 198.) $AB \times BE > BC \times DB$. Cela posé,

1°. Ajoûtant $BC \times BE$ à chaque membre de cette Inégalité, on auroit $AB \times BE + BC \times BE$, produit des Extrêmes du second arrangement, plus grand que $BC \times DB + BC \times BE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi (*N*°. 205.) le second arrangement $AB+BC : DB+BE > BC : BE$ auroit nécessairement lieu.

2°. Ajoûtant $AB \times DB$ à chaque membre de la même Inégalité $AB \times BE > BC \times DB$ ou $BC \times DB <$

$AB \times BE$, on trouveroit que $AB \times DB + BC \times DB$, produit des Extrêmes du troisiéme arrangement, seroit moindre que $AB \times DB + AB \times BE$ produit des Moyens du même troisiéme arrangement. Ainsi ce troisiéme arrangement $AB+BC : DB+BE < AB : DB$ auroit nécessairement lieu (*N°.* 205.).

On démontrera de la même maniere, que si l'on avoit

$$AB : DB < BC : BE$$

On trouveroit $\begin{cases} AB+BC : DB+BE < BC : BE \\ AB+BC : DB+BE > AB : DB \end{cases}$

SIXIÉME REGLE.

220 *Si l'on a une Proportion géométrique* $AC : BC :: DE : BE$, *on pourra la changer en celle-ci* $AC - BC : BC :: DE - BE : BE$. Fig. 147.

Ce changement s'appelle DIVIDENDO ou DETRAHENDO.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer cette Regle, il suffit de faire voir (*N°.* 201.) que le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens; c'est-à-dire, que $AC \times BE - BC \times BE = BC \times DE - BC \times BE$, ou que $AC \times BE = BC \times DE$. Or cette Égalité se déduit de la Proportion supposée $AC : BC :: DE : BE$. Donc $AC - BC : BC :: DE - BE : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DÉMONSTRATION.

1°. $AH : BH :: AC : BC$ (*N°.* 193.). Fig. 155

2°. $AC : BC :: DE : BE$ (*hyp.*). ou 157.

3°. (*N°.* 193.) $DE : BE :: DH : BH$.

Donc $AH : BH :: DH : BH$; & par conséquent (*N°.* 190.) $AH = DH$,

Otant *BH* de chaque membre, on aura $AE=DC$.

Donc (*N°*. 200.) $AB : BC :: DB : BE$; c'eſt-à-dire, que $AC - BC : BC :: DE - BE : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lorſque deux Lignes AC, DE, *ſeront coupées de maniere que la premiere Ligne* AC *ſera à ſa ſeconde partie* BC, *comme la ſeconde Ligne* DE *à ſa ſeconde partie* BE, *nous conclurrons par cette ſixiéme Régle que la premiere partie* AB *de la premiere Ligne eſt à ſa ſeconde partie* BC, *comme la premiere partie* DB *de la ſeconde Ligne eſt à ſa ſeconde partie* BE.

REMARQUE.

221 Nous remarquerons que ſi l'on avoit $AC : BC > DE : BE$, l'on auroit auſſi *Detrahendo* $AC - BC : BC > DE - BE : BE$.

Car le premier arrangement donneroit (*N°*. 198.) $AC \times BE > BC \times DE$: & retranchant le produit $BC \times BE$ de chaque membre de cette Inégalité, on trouveroit $AC \times BE - BC \times BE$, produit des Extrêmes du ſecond arrangement, plus grand que $BC \times DE - BC \times BE$ produit des Moyens du même ſecond arrangement. Ainſi le ſecond arrangement $AC - BC : BC > DE - BE : BE$ auroit néceſſairement lieu (*N°*. 205.).

On démontrera de même que ſi l'on avoit $AC : BC < DE : BE$, *l'on auroit auſſi* Detrahendo $AC - BC : BC < DE - BE : BE$.

SEPTIÉME REGLE.

222 *Si l'on a une Proportion géométrique* $AC : BC :: DE : BE$, *on pourra la changer ainſi* $AC : AC - BC :: DE : DE - BE$.

Ce changement s'appelle CONVERTENDO.

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes AC, $(AC-BC)$, DE, $(DE-BE)$, eſt $AC\times DE - AC\times BE$; & le produit des Moyens eſt $AC\times DE - BC\times DE$. Mais ces deux produits ſont égaux; car

1°. $AC\times DE = AC\times DE$.

2°. A cauſe que (*hyp.*) $AC:BC::DE:BE$, on aura (*N*°. 196.) $AC\times BE = BC\times DE$.

Donc $AC:AC-BC::DE:DE-BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puiſque (*hyp.*) $AC:BC::DE:BE$, on aura (*N*°. 220.) $AH=DH$; & ôtant BH de chaque membre, on aura $AE=DC$. Fig. 155 ou 157.

Comparant enſemble ces deux Égalités, on aura (*N*°. 190.) $AH:AE::DH:DC$. Mais

1°. $AC:AB::AH:AE$ (*N*°. 193.).

2°. On a vu que $AH:AE::DH:DC$.

3°. (*N*°. 193.) $DH:DC::DE:DB$.

Donc $AC:AB::DE:DB$, c'eſt-à-dire, que $AC:AC-BC::DE:DE-BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lorſque deux Lignes AC, DE, *ſeront coupées de maniere que la premiere Ligne* AC *ſera à ſa ſeconde partie* BC, *comme la ſeconde Ligne* DE *à ſa ſeconde partie* BE, *nous conclurrons par cette ſeptiéme Régle, que la premiere Ligne* AC *eſt à ſa premiere partie* AB, *comme la ſeconde Ligne* DE *eſt à ſa premiere partie* DB.

REMARQUE.

223 On remarquera que ſi l'on avoit $AC:BC>DE:BE$, l'on trouveroit *Convertendo* $AC:AC-BC<DE:DE-BE$.

Car le premier arrangement qu'on suppose donneroit (*N°.* 198.) $AC \times BE > BC \times DE$: & retranchant ces deux quantités inégales de la même quantité $AC \times DE$, on trouveroit $AC \times DE - AC \times BE$, produit des Extrêmes du second arrangement, plus petit que $AC \times DE - BC \times DE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi ce second arrangement $AC : AC - BC < DE : DE - BE$ auroit nécessairement lieu.

On prouvera de même que si l'on avoit $AC : BC < DE : BE$, *l'on trouveroit* Convertendo $AC : AC - BC > DE : DE - BE$.

HUITIÉME REGLE.

224 *Si l'on a une Proportion géométrique* $AC : DE :: BC : BE$, *on pourra la changer en celle-ci* $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$; *c'est-à-dire, qu'un Antécédent sera à son Conséquent, comme la différence des Antécédens est à la différence des Conséquens.*

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes est $AC \times DE - AC \times BE$, & le produit des Moyens est $AC \times DE - DE \times BC$.

Or 1°. $AC \times DE = AC \times DE$.

2°. Puisque (*hyp.*) $AC : DE :: BC : BE$, on aura (196.) $AC \times BE = DE \times BC$ ou $-AC \times BE = -DE \times BC$. Ainsi les produits des Extrêmes & des Moyens sont égaux.

Donc $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$.

Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque $AC : DE :: BC : BE$ (*hyp.*), on aura *Alternando* (*N°.* 206.) $AC : BC :: DE : BE$.

Changeant cette Proportion *Convertendo* (N°.222.), on aura $AC : AC - BC :: DE : DE - BE$.

Changeant encore cette derniere Proportion *Alternando*, on aura $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

225 Si l'on avoit $AC : DE > BC : BE$, on trouveroit au contraire

$$AC : DE < AC - BC : DE - BE$$
$$BC : BE < AC - BC : DE - BE$$

Car le premier arrangement donneroit (N°. 198.) $AC \times BE > BC \times DE$.

1°. Retranchant ces deux membres inégaux de la même quantité $AC \times DE$, on trouveroit que $AC \times DE - AC \times BE$, produit des Extrêmes dans le second arrangement, seroit moindre que $AC \times DE - BC \times DE$ produit des Moyens dans le même second arrangement. Ainsi (N°. 205.) le second arrangement $AC : DE < AC - BC : DE - BE$ auroit nécessairement lieu.

2°. Si de l'Inégalité $AC \times BE > BC \times DE$ ou $BC \times DE < AC \times BE$, on retranchoit la même quantité $BC \times BE$, on trouveroit que $BC \times DE - BC \times BE$, produit des Extrêmes dans le troisiéme arrangement, seroit encore moindre que $AC \times BE - BC \times BE$ produit des Moyens dans le même troisiéme arrangement. Ainsi le troisiéme arrangement auroit encore lieu.

On remarquera encore, & l'on prouvera de la même maniere, que si l'on avoit $AC : DE < BC : BE$

On auroit $\begin{cases} AC : DE > AC - BC : DE - BE \\ BC : BE > AC - BC : DE - BE \end{cases}$

NEUVIÉME REGLE.

Fig. 160 & 161. 226 *Si l'on a deux Proportions géométriques quelconques, par exemple*

AC : BC :: MO : NO
DC : CE :: PO : OQ

Et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire, terme par terme correspondant, on aura cette nouvelle Proportion
AC×DC : BC×CE :: MO×PO : NO×OQ.

DÉMONSTRATION.

Les huit termes qui composent les deux Proportions données, étant disposés comme on le voit dans les Figures 160, 161, de maniere que ceux de la premiere soient perpendiculaires sur ceux de la seconde, on fera les deux Parallélogrammes rectangles *DG*, *PS*, & l'on tirera les deux Droites *BF*, *NR*, paralléles aux bases *DE*, *PQ*, de ces Rectangles. Cela posé, on aura

1°. *AE* : *BE* :: *AC* : *BC* (*N°*. 193.).
2°. *AC* : *BC* :: *MO* : *NO* (*hyp.*).
3°. (*N°*. 193.) *MO* : *NO* :: *MQ* : *NQ*

Donc *AE* : *BE* :: *MQ* : *NQ*, & *Alternando* (*N°*. 206.) *AE* : *MQ* :: *BE* : *NQ*.

On aura aussi

1°. *AD* : *AE* :: *DC* : *CE* (*N°*. 193.).
2°. (*hyp.*) *DC* : *CE* :: *PO* : *OQ*.
3°. (*N°*. 193.) *PO* : *OQ* :: *MP* : *MQ*

Donc *AD* : *AE* :: *MP* : *MQ* ; & *Alternando* l'on aura *AD* : *MP* :: *AE* : *MQ*.

Mais on a trouvé *AE* : *MQ* :: *BE* : *NQ*. Donc *AD*:*MP*::*BE*:*NQ*, & *Alternando* *AD*:*BE*::*MP*:*NQ*; c'est-à-dire, *AC*×*DC*:*BC*×*CE* :: *MO*×*PO*:*NO*×*OQ*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) $\begin{cases} AC : BC :: MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{cases}$

La premiere Proportion donnera (*N*°. 196.) $AC \times NO = BC \times MO$.

La seconde Proportion donnera (*N*°. 196.) $DC \times OQ = CE \times PO$.

Multipliant ces deux Égalités ensemble, c'est-à-dire, membre par membre, on aura $AC \times NO \times DC \times OQ = BC \times CE \times MO \times PO$. Mais les deux membres de cette Égalité sont les produits des Extrêmes & des Moyens des quatre termes $AC \times DC$, $BC \times CE$, $MO \times PO$, $NO \times OQ$. Donc (*N*°. 201.) ces quatre termes font une Proportion géométrique. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER.

227 Donc si l'on a plus de deux Proportions géométriques, par exemple, ces trois ci

$$AC : BC :: MO : NO$$
$$DC : CE :: PO : OQ$$
$$FG : GH :: RS : ST$$

On aura encore une Proportion géométrique, en les multipliant toutes ensemble par ordre, c'est-à-dire, terme par terme correspondant.

Car 1°. les deux premieres Proportions étant multipliées par ordre, donneront (*N*°. 226.) $AC \times DC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ$.

2°. Multipliant cette Proportion par ordre avec la troisiéme, $FG : GH :: RS : ST$, on aura (*N*°. 226.) $AC \times DC \times FG : BC \times CE \times GH :: MO \times PO \times RS : NO \times OQ \times ST$.

On pourra multiplier de même par ordre tant de Proportions qu'on voudra, & il en résultera toûjours une Proportion géométrique.

Corollaire II.

228 Donc si l'on a une Proportion géométrique; par exemple, $AB:BC::DB:BE$,

On aura
$$\left\{\begin{array}{l} AB\times AB : BC\times BC :: DB\times DB : BE\times BE \\ AB\times AB\times AB : BC\times BC\times BC :: DB\times DB\times DB : BE\times BE\times BE \\ AB\times AB\times AB\times AB : BC\times BC\times BC\times BC :: DB\times DB\times DB\times DB : BE\times BE\times BE\times BE \end{array}\right.$$
&c.

Car écrivant la Proportion $AB:BC::DB:BE$ autant de fois que l'on voudra, comme ici

$$AB : BC :: DB : BE$$
$$AB : BC :: DB : BE$$
$$AB : BC :: DB : BE$$
$$AB : BC :: DB : BE$$

1°. Si l'on multiplie deux de ces Proportions par ordre, on aura

$$AB\times AB : BC\times BC :: DB\times DB : BE\times BE.$$

2°. Si l'on multiplie trois de ces Proportions par ordre, on aura

$$AB\times AB\times AB : BC\times BC\times BC :: DB\times DB\times DB : BE\times BE\times BE.$$

3°. Si l'on multiplie quatre Proportions par ordre, on aura

$$AB\times AB\times AB\times AB : BC\times BC\times BC\times BC :: DB\times DB\times DB\times DB : BE\times BE\times BE\times BE.$$

& ainsi des autres.

Au lieu d'écrire
$AB\times AB$ *qui signifie* le Quarré de AB *ou* 2e Puissance de AB
$AB\times AB\times AB$ *qui signifie* le Cube de AB *ou* 3e Puissance de AB
$AB\times AB\times AB\times AB$ *qu'on appelle la* 4e Puissance de AB
$AB\times AB\times AB\times AB\times AB$ *qu'on appelle la* 5e Puissance de AB
&c.
on écrit pour abréger $\overline{AB}^2$, $\overline{AB}^3$, $\overline{AB}^4$, $\overline{AB}^5$

On fera la même chose pour les différentes Puissances de BC, DB, BE; *c'est-à-dire, qu'au lieu d'écrire* $BC\times BC$ *qui signifie* le Quarré *ou* la seconde Puissance *de* BC, *on écrira* $\overline{BC}^2$; *& au lieu d'écrire* $DB\times DB\times DB$ *qui signifie* le Cube *ou* la troisiéme Puissance *de* DB, *on écrira* $\overline{DB}^3$: *& ainsi des autres Puissances des différentes Lignes.*

On peut donc conclurre que quand quatre Grandeurs seront en Proportion géométrique, toutes leurs Puissances de même degré seront aussi en Proportion géométrique; c'est-à-dire, que si l'on a

$$AB : BC :: DB : BE$$

On aura aussi
$$\begin{cases} \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2 \\ \overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: \overline{DB}^3 : \overline{BE}^3 \\ \overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: \overline{DB}^4 : \overline{BE}^4 \\ \overline{AB}^5 : \overline{BC}^5 :: \overline{DB}^5 : \overline{BE}^5 \end{cases}$$
&c.

Corollaire III.

229 Donc si l'on a une Suite *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, composée de tant de termes que l'on voudra, le Rapport du premier terme *AB*, au dernier *EF*, sera égal au Rapport qui résultera de la multiplication par ordre du Rapport du premier terme au second, du Rapport du second au troisiéme, de celui du troisiéme au quatriéme, & de celui du quatriéme au dernier. Car si l'on écrit tous ces Rapports les uns sous les autres,

On aura
$$\begin{cases} AB : BC \\ BC : CD \\ CD : DE \\ DE : EF \end{cases}$$

Et multipliant tous ces Rapports par ordre, on aura le Rapport de $AB \times BC \times CD \times DE$ à $BC \times CD \times DE \times EF$.

Et comme ce Rapport composé ne changera point (N°. 191.), en divisant son Antécédent & son Conséquent par la même quantité $BC \times CD \times DE$, il deviendra égal au Rapport de AB à EF; c'est-à-dire, que l'on aura

$$AB : EF :: AB \times BC \times CD \times DE : BC \times CD \times DE \times EF.$$

REMARQUE.

230 On remarquera que

Fig. 162 & 161. 1°. Si l'on avoit $\begin{cases} AC : BC > MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{cases}$

On auroit en multipliant par ordre

$$AC \times DC : BC \times CE > MO \times PO : NO \times OQ.$$

Car après avoir fait des Rectangles AD, BE, MP, NQ, qui représentent ces quatre termes résultans de la multiplication par ordre, si l'on retranche de AC une partie AI telle que le reste IC soit en Proportion avec les trois termes BC, MO, NO, c'est-à-dire, telle que l'on ait $IC : BC :: MO : NO$; & qu'on multiplie cette Proportion par ordre avec celle-ci $DC : CE :: PO : OQ$;

On aura $ID \times DC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ$ (N°. 226.); c'est-à-dire, qu'en tirant NI paralléle à DC, l'on aura $ID : BE :: MP : NQ$.

Mais $AD > ID$, parce que $AC > IC$. Donc on aura $AD : BE > MP : NQ$; c'est-à-dire, $AC \times DC : BC \times CE > MO \times PO : NO \times OQ$.

Fig. 163 & 161. 2°. Si l'on avoit $\begin{cases} AC : BC > MO : NO \\ DC : CE > PO : OQ \end{cases}$

On auroit en multipliant par ordre

$$AC \times DC : BC \times CE > MO \times PO : NO \times OQ.$$

Car

Car ayant repréſenté ces quatre termes réſultans de la multiplication par ordre, par quatre Rectangles *AD*, *BE*, *MP*, *NQ*, ſi l'on retranche de *AC* une partie *AI* telle que l'on ait $IC : BC :: MO : NQ$, & qu'on retranche de *DC* une partie *DH* telle que l'on ait $HC : CE :: PO : OQ$, & qu'enſuite on multiplie ces deux Proportions par ordre, on aura $IC \times HC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ$ (*N*°. 226.); c'eſt-à-dire, qu'en tirant *NI* paralléle à *DC*, & *HN* paralléle à *AC*, l'on aura $IH : BE :: MP : NQ$.

Mais $AD > IH$, parce que $AC > IC$ & $DC > HC$. Ainſi $AD : BE > MP : NQ$ ou $AC \times DC : BC \times CE > MO \times PO : NO \times OQ$.

On démontrera de la même maniere que

Si l'on avoit $\begin{cases} AC : BC < MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{cases}$ Fig. 164 & 161.

Ou ſi l'on avoit $\begin{cases} AC : BC < MO : NO \\ DC : CE < PO : OQ \end{cases}$ Fig. 165, & 161.

On auroit dans l'un & l'autre cas, en multipliant par ordre,

$$AC \times DC : BC \times CE < MO \times PO : NO \times OQ.$$

La Démonſtration de ces deux cas ne différera de celle des deux précédens, qu'en ce que, au lieu de retrancher de AC *une partie* AI, *& de* DC *une partie* HD, *il faudra dans les deux nouveaux cas ajoûter à* AC *une partie* AI, *& dans le ſecond cas ajoûter à* DC *une partie* HD; *de maniere que l'on ait*

$$\left.\begin{matrix} IC : BC :: MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} IC : BC :: MO : NO \\ HC : CE :: PO : OQ \end{matrix}\right.$$

DIXIÉME REGLE.

231 *Si l'on divise les quatre termes d'une Proportion* AD : BE :: MP : NQ *par les quatre termes correspondans d'une autre Proportion* AC : BC :: MO : NO, *ce qu'on appelle* Diviser par ordre, *les quatre Quotiens qui résulteront de ces Divisions seront en Proportion ; c'est-à-dire, qu'on aura* $\frac{AD}{AC} : \frac{BE}{BC} :: \frac{MP}{MO} : \frac{NQ}{NO}$.

Démonstration.

Car les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, étant multipliés par ordre par les quatre Diviseurs $AC : BC :: MO : NO$, doivent reproduire les quatre Dividendes, c'est-à-dire, les quatre termes de la Proportion $AD : BE :: MP : NQ$.

Mais si les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, n'étoient point en Proportion, en les multipliant par les quatre termes de la Proportion $AC : BC :: MO : NO$, les quatre produits AD, BE, MP, NQ, ne seroient point en Proportion (*N°.* 230.). Donc puisque les quatre Produits AD, BE, MP, NQ, sont supposés en Proportion, il faut que les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, soient aussi en Proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

ONZIÉME REGLE.

232 *Si quatre Quarrés sont en Proportion, les Racines ou côtés de ces Quarrés seront aussi en Proportion ; c'est-à-dire, que si l'on a* $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$, *on aura aussi* $AB : BC :: DB : BE$.

Démonstration.

Car si la premiere Racine AB étoit trop grande ou trop petite pour être en Proportion avec les trois

autres BC, DB, BE; c'eſt-à-dire, ſi l'on avoit
$AB : BC > DB : BE$ ou $AB : BC < DB : BE$,
en multipliant ces quatre termes par eux-mêmes, ſavoir, par
$AB : BC > DB : BE$ ou par $AB : BC < DB : BE$;
on auroit (*N*°. 230.)
$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 > \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$ ou $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 < \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$;
ce qui ſeroit contraire à l'hypothèſe, puiſqu'on ſuppoſe $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$.

Donc la premiere Racine AB n'eſt ni trop grande ni trop petite pour être en Proportion avec les trois autres BC, DB, BE; & par conſéquent $AB : BC :: DB : BE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

233 On démontrera de la même maniere que ſi quatre Cubes, ou quatre quatriémes Puiſſances, ou quatre Puiſſances quelconques ſemblables, ſont en Proportion, les Racines de ces Puiſſances ſeront auſſi en Proportion; c'eſt-à-dire, que ſi l'on a
$\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: \overline{DB}^3 : \overline{BE}^3$ ou $\overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: \overline{DB}^4 : \overline{BE}^4$;
On aura auſſi $AB : BC :: DB : BE$.

Car ſi la premiere Racine AB étoit trop grande ou trop petite pour être en Proportion avec les trois autres BC, DB, BE, c'eſt-à-dire, ſi l'on trouvoit
$AB : BC > DB : BE$ ou $AB : BC < DB : BE$;
en multipliant ces quatre termes par eux-mêmes, on auroit (*N*°. 230.)
$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 > \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$ ou $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 < \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$;
& multipliant ces quatre termes par ordre par leurs Racines, on auroit
$\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 > \overline{DB}^3 : \overline{BE}^3$ ou $\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 < \overline{DB}^3 : \overline{BE}^3$;
ce qui ſeroit contre l'hypothèſe.

En multipliant encore ces quatre nouveaux termes par ordre avec leurs Racines, on trouveroit $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{BC}>\overrightarrow{DB}:\overrightarrow{BE}$ ou $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{DB}:\overrightarrow{BE}$; ce qui feroit contraire à la fuppofition.

Et continuant de multiplier ces nouveaux termes par leurs Racines, afin d'avoir toûjours de nouvelles Puiffances femblables, on trouveroit que ces Puiffances ne feroient point en Proportion; ce qui impliqueroit contradiction.

Donc fi quatre Puiffances femblables quelconques font en Proportion, la Racine de la premiere ne peut être trop grande ni trop petite pour être en Proportion avec les trois autres, fans impliquer contradiction; d'où il fuit que fi l'on a quatre Cubes ou quatre quatriémes Puiffances, ou enfin quatre Puiffances femblables en Proportion, les Racines de ces quatre Puiffances feront auffi en Proportion.

DOUZIÈME REGLE.

234 *Soient deux Suites de Grandeurs*

AB, BC, CD, DE, &c.
MN, NO, OP, PQ, &c.

telles que l'on ait
1°. AB : BC :: OP : PQ
2°. BC : CD :: NO : OP
3°. CD : DE :: MN : NO

On aura AB : DE :: MN : PQ.

Ce changement s'appelle CONCLUSION DE PROPORTION TROUBLÉE *ou* MAL ORDONNÉE.

DÉMONSTRATION.

Multipliant par ordre toutes les Proportions que l'hypothèfe renferme, on aura

$AB \times BC \times CD : BC \times CD \times DE :: OP \times NO \times MN : PQ \times OP \times NO.$

Divisant ensuite les deux termes du premier Rapport par $BC \times CD$, & les deux termes du second Rapport par $OP \times NO$, ce qui ne changera point ces Rapports (*N°*. 192.), on trouvera $AB : DE :: MN : PQ$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

235 Lorsque les Proportions données pour les multiplier par ordre, ont eu des termes égaux parmi les Antécédens & les Conséquens des Rapports dont elles étoient composées, on a commencé par multiplier ensemble tous les termes correspondans de ces Proportions; ensuite on a divisé les termes de chaque Rapport de la Proportion composée, par les Quantités qui se sont trouvées les mêmes dans son Antécédent & dans son Conséquent.

Par exemple, lorsqu'on a eu à multiplier par ordre ces trois Proportions $\begin{cases} AB : BC :: OP : PQ \\ BC : CD :: NO : OP \\ CD : DE :: MN : NO \end{cases}$

On en a premièrement fait cette Proportion composée

$$AB \times BC \times CD : BC \times CD \times DE :: OP \times NO \times MN : PQ \times OP \times NO.$$

Ensuite ayant remarqué que les deux premiers termes de cette Proportion contenoient les deux mêmes Facteurs BC, CD, on les a divisés par ces deux Facteurs; c'est-à-dire, qu'on a supprimé ces deux Facteurs dans les deux premiers termes de la Proportion composée où ils se trouvoient: & ayant aussi remarqué que les deux derniers termes de la Proportion composée contenoient les mêmes Facteurs OP, NO, on a encore supprimé ces Facteurs dans ces deux ter-

termes. Par ces divisions, la Proportion composée, résultante de la multiplication par ordre des trois Proportions données, a été réduite à cette simple Proportion.

$$AB : DE :: MN : PQ.$$

Pour s'épargner la peine d'écrire, dans les Proportions composées, les Facteurs qui doivent en être supprimés, on remarquera que les termes qui seront les mêmes parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens des Proportions qu'il faudra multiplier par ordre, seront nécessairement Facteurs dans les deux premiers termes de la Proportion composée, & pourront par conséquent être supprimés de cette derniere Proportion; & que les termes qui seront les mêmes parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens des mêmes Proportions, seront Facteurs des deux derniers termes de la Proportion composée, & pourront par conséquent être supprimés. Ainsi avant de multiplier par ordre les Proportions données, on pourra supprimer les termes qui seront les mêmes parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens, & supprimer aussi les termes qui seront les mêmes parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens.

Par exemple, si l'on doit multiplier par ordre ces trois Proportions

$$AB : \underline{BC} :: \underline{OP} : PQ$$
$$\underline{BC} : \underline{CD} :: \underline{NO} : \underline{OP}$$
$$\underline{CD} : DE :: MN : \underline{NO}$$

on remarquera que les termes BC, CD, qui se trouvent parmi les premiers Antécédens & les premiers

Conséquens, seront nécessairement Facteurs des deux premiers termes de la Proportion composée, & peuvent par conséquent être supprimés; & que les termes *OP*, *NO*, qui se trouvent parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens, seront Facteurs des deux derniers termes de la Proportion composée, & peuvent être aussi supprimés. Ainsi avant de multiplier par ordre, on barrera ou bien on soûlignera parmi les premiers Antécédens & parmi les premiers Conséquens, les termes *BC*, *CD*, pour marquer qu'ils doivent être supprimés dans la multiplication par ordre; & l'on barrera ou bien on soûlignera pareillement parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens, les termes *OP*, *NO*, pour marquer qu'ils doivent aussi être supprimés. Dans l'Exemple proposé, on a mieux aimé, pour la plus grande commodité de l'impression, soûligner les termes qui doivent être supprimés, que de les barrer.

Les termes qui doivent être supprimés dans les Proportions qu'on doit multiplier par ordre, étant ainsi soûlignés, on ne multipliera par ordre que les termes qui ne seront pas soûlignés; & comme dans l'Exemple proposé il ne restera des trois Proportions données que les quatre termes *AB*, *DE*, *MN*, *PQ*, on conclurra tout d'un coup que la Proportion simple *AB* : *DE* :: *MN* : *PQ* est la résultante des trois Proportions qu'on a proposé de multiplier par ordre.

2°. Puisqu'en alternant une Proportion, l'on rend ses deux Antécédens les deux premiers termes, & ses deux Conséquens les deux derniers termes d'une autre Proportion, & qu'on peut diviser les deux premiers termes ou les deux derniers termes d'une Proportion par telle Grandeur qu'on veut, sans troubler cette Proportion, il est clair qu'on peut aussi diviser les deux Antécédens ou les deux Conséquens d'une

Proportion par telle Grandeur qu'on veut, sans déranger cette Proportion.

Par exemple, si l'on avoit cette Proportion

$$AB \times OP : BC \times NO :: OP \times CD : PQ \times BC,$$

on diviseroit ses deux Antécédens par OP, & ses deux Conséquens par BC; ce qui la réduiroit à celle-ci:

$$AB : NO :: CD : PQ.$$

Car en alternant la premiere Proportion, l'on auroit celle-ci,

$$AB \times OP : OP \times CD :: BC \times NO : PQ \times BC,$$

dont les deux premiers termes étant divisés par OP, & les deux derniers termes par BC, donneroient $AB : CD :: NO : PQ$, & *Alternando* $AB : NO :: CD : PQ$.

Comme les termes qui se trouveront les mêmes parmi les premiers & seconds Antécédens, ou parmi les premiers & seconds Conséquens des Proportions qu'il faudra multiplier par ordre, seront nécessairement Facteurs dans les deux Antécédens ou dans les deux Conséquens de la Proportion composée, il est clair par ce qui vient d'être dit, qu'avant de multiplier par ordre plusieurs Proportions, les termes qui se trouveront les mêmes parmi les premiers & seconds Antécédens de ces Proportions pourront être barrés ou soûlignés, pour marquer qu'ils doivent être supprimés; & que les termes qui seront les mêmes parmi les premiers & seconds Conséquens, pourront pareillement être barrés & soûlignés pour être rejetés: en sorte qu'on ne multipliera par ordre, que les termes qui ne seront pas barrés ou soûlignés; ce qui épargnera la peine d'écrire des Facteurs inutiles dans les termes de la Proportion composée.

Par exemple, si l'on devoit multiplier par ordre ces deux Proportions

$$AB:\underline{BC}::\underline{OP}:PQ$$

$$\underline{OP}:NO::CD:\underline{BC}$$

on soûligneroit OP, qui est parmi les premiers & seconds Antécédens ; on souligneroit pareillement BC, qui se trouve parmi les premiers & seconds Conséquens : ensuite on multiplieroit par ordre les termes qui ne seroient point soûlignés ; c'est-à-dire, que dans le cas présent on prendroit les quatre termes restans pour en faire une Proportion, & que l'on auroit

$$AB:NO::CD:PQ.$$

3°. Enfin il résulte de tout ce qui vient d'être dit, que si l'on a plusieurs Proportions à multiplier par ordre, par exemple, celles-ci

$$AB:\underline{BC}::\underline{OP}:PQ$$

$$\underline{BC}:\underline{NO}::\underline{CD}:\underline{OP}$$

$$\underline{CD}:DE::MN:\underline{NO}$$

il faudroit, suivant la premiere partie de ce Scholie, soûligner d'abord BC parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens ; puis soûligner OP parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens. Ensuite il faudroit, suivant la seconde partie du Scholie, soûligner CD qui se trouve parmi les premiers & seconds Antécédens, & soûligner enfin NO qui est parmi les premiers & seconds Conséquens. Tous ces termes étant soûlignés, il ne resteroit pour le résultat de la multiplication par ordre que cette Proportion $AB:DE::MN:PQ.$

TREIZIÉME REGLE.

236 *Si l'on a une Progression géométrique*

$$\div AB : BC : CD : DE : EF : \&c.$$

On aura
$$\begin{cases} AB : BC :: AB : BC \\ \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB : CD \\ \overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE \\ \overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: AB : EF \\ \&c. \end{cases}$$

C'est-à-dire, que

Une Puissance quelconque du premier terme de la Progression

Est à une Puissance semblable du second terme.

Comme le premier terme

Est à celui dont le Numéro est plus grand d'une unité que le degré de la Puissance où les deux premiers termes sont élevés.

DÉMONSTRATION.

Puisque (*No.* 189.) chaque terme de la Progression géométrique $\div AB : BC : CD : DE : EF$: &c contient également celui qui le suit, ou est également contenu en lui,

On aura ces Proportions
$$\begin{cases} AB : BC :: AB : BC \\ AB : BC :: BC : CD \\ AB : BC :: CD : DE \\ AB : BC :: DE : EF \\ \&c. \end{cases}$$

1°. Multipliant par ordre les deux premieres Pro-

portions, & (N°. 235.) supprimant BC qui se trouve parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^2 : \overline{BC} :: AB : CD.$$

2°. Multipliant par ordre les trois premieres Proportions, en observant (N°. 235.) de supprimer les termes BC, CD, qui se trouvent parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE.$$

3°. Multipliant par ordre les quatre premieres Proportions, en observant (N°. 235.) de supprimer les termes BC, CD, DE, qui se trouvent parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: AB : EF$$

& ainsi des autres Puissances de AB & de BC.

Il est donc démontré que si l'on a

$$\div AB : BC : CD : DE : EF : \&c.$$

On aura
$$\left\{\begin{array}{l} AB : BC :: AB : BC \\ \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB : CD \\ \overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE \\ \overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: AB : EF \\ \&c. \end{array}\right.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

QUATORZIÉME REGLE.

237 *Si l'on a une Progreſſion géométrique*

$$\div AB : BC : CD : DE : EF :$$

On en pourra conclurre ces deux Proportions

$$AB - BC : AB :: AB - EF : AB + BC + CD + DE$$
$$BC - AB : AB :: EF - AB : AB + BC + CD + DE$$

c'eſt-à-dire, que
La différence des deux premiers termes
Eſt au premier terme,
Comme la différence du premier terme au dernier
Eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier.

Démonstration.

Puiſque dans la Progreſſion géométrique

$$\div AB : BC : CD : DE : EF :$$

chaque terme contient également celui qui le ſuit, ou eſt également contenu en lui (*N*°. 189.), on en pourra faire cette Suite de Rapports égaux

$$AB : BC :: BC : CD :: CD : DE :: DE : EF.$$

Et puiſque (*N*°. 217.) un ſeul Antécédent eſt à ſon Conſéquent, comme la ſomme des Antécédens eſt à la ſomme des Conſéquens, on aura

$$AB : BC :: AB + BC + CD + DE : BC + CD + DE + EF.$$
ou *Invertendo*
$$BC : AB :: BC + CD + DE + EF : AB + BC + CD + DE.$$

Changeant la premiere de ces deux Proportions

Convertendo (*N*°. 222.), puis changeant encore celle qu'on trouvera *Invertendo* (*N*°. 204.), & changeant la seconde Proportion *Dividendo* (*N*°. 220.), on aura

$$AB-BC : AB :: AB+BC+CD+DE-BC-CD-DE-EF : AB+BC+CD+DE.$$
$$BC-AB : AB :: BC+CD+DE+EF-AB-BC-CD-DE : AB+BC+CD+DE.$$

Ou si l'on supprime les quantités *BC*, *CD*, *DE*, qui se détruisent dans le troisiéme terme de chacune de ces Proportions, on aura enfin

$$AB-BC : AB :: AB-EF : AB+BC+CD+DE$$
$$BC-AB : AB :: EF-AB : AB+BC+CD+DE$$

Ce qu'il falloit démontrer.

238 *On démontrera de la même maniere que*

$$AB-BC : BC :: AB-EF : BC+CD+DE+EF.$$
$$BC-AB : BC :: EF-AB : BC+CD+DE+EF.$$

c'est-à-dire, que

La différence des deux premiers termes
Est au second terme,
Comme la différence du premier terme au dernier
Est à la somme de tous les termes qui suivent le premier.

Car ayant repris ces deux Proportions contenues dans la démonstration de la présente Régle,

$$AB : BC :: AB+BC+CD+DE : BC+CD+DE+EF$$
$$BC : AB :: BC+CD+DE+EF : AB+BC+CD+DE$$

Si l'on change la premiere Dividendo (*N*°. 220.), & *qu'après avoir changé la seconde* Convertendo(*N*°.222.), *on la change encore* Invertendo (*N*°. 204.), *on trouvera, après avoir effacé ce qui se détruira dans le troisiéme terme de chaque Proportion résultante,*

$$AB-BC : BC :: AB-EF : BC+CD+DE+EF$$
$$BC-AB : BC :: EF-AB : BC+CD+DE+EF$$

Corollaire I.

239 Puiſqu'une Progreſſion géométrique donne cette Proportion (*N°*. 237.)

La différence des deux premiers termes
Eſt au premier terme.
Comme la différence du premier terme au dernier
Eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier ;

Et que (*N°*. 197.) le quatriéme terme d'une Proportion géométrique eſt égal au produit du ſecond & du troiſiéme diviſé par le premier ; il eſt clair qu'on aura la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier dans une Progreſſion géométrique, en multipliant le premier terme par la différence du premier terme au dernier, & en diviſant le produit par la différence des deux premiers termes.

Par exemple, ſi l'on a cette Progreſſion géométrique

$$\div\!\div AB : BC : CD : DE : EF :$$

on trouvera que la ſomme $AB + BC + CD + DE$ des termes qui précedent le dernier, eſt égale à $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC}$.

Donc la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion géométrique $\div\!\div AB : BC : CD : DE : EF :$ ſera $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC} + EF$.

Corollaire II.

240 La quantité $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC} + EF$, qui exprime la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion dont le premier terme eſt AB, le ſecond BC, & dont le dernier eſt EF, peut être écrite ſous cette forme

$$\frac{AB}{AB - BC} \times (AB - EF) + EF.$$

Divisant par BC le numérateur & le dénominateur de la Fraction $\frac{AB}{AB-BC}$, ce qui (No. 192.) ne changera point le Rapport de AB à $AB-BC$ exprimé par la Fraction $\frac{AB}{AB-BC}$, la derniere quantité qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression géométrique prendra cette forme

$$\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-\left(\frac{BC}{BC}\right)}\times(AB-EF)+EF.$$

ou $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times(AB-EF)+EF$; parce que $\frac{BC}{BC}=1$, & par conséquent $\frac{-BC}{BC}=-1$.

Or $\frac{AB}{BC}$ est le Rapport du premier terme au second; c'est-à-dire, la Raison qui regne dans la Progression; & $\frac{AB}{BC}-1$ est un nombre plus petit d'une unité que la Raison de la Progression.

Donc $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times(AB-EF)+EF$, qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression, signifie que pour avoir cette somme, il faut diviser la Raison de la Progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité; multiplier le Quotient de la Division par la différence du premier terme au dernier; & ajoûter le dernier terme au produit de cette multiplication.

Cette Proposition a déjà été démontrée dans l'Arithmétique, No. 199.

Corollaire III.

241 Si la Progreſſion géométrique eſt décroiſſante & continuée à l'infini, ſon dernier terme ſera infiniment petit, & ne ſera par conſéquent point comparable aux deux premiers termes; en ſorte que le premier terme pourra être pris pour la différence du premier terme au dernier, & que la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier pourra auſſi être priſe pour la ſomme de tous les termes.

Dans ce cas, la Proportion qu'on vient de démontrer pour les Progreſſions, ſavoir,

La différence des deux premiers termes
Eſt au premier terme,
Comme la différence du premier terme au dernier
Eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier;

ſe changera en celle-ci:

La différence des deux premiers termes
Eſt au premier terme,
Comme le premier terme
Eſt à la ſomme de tous les termes de la Progreſſion décroiſſante pouſſée juſqu'à l'infini.

Il ſuit de là (*N°*. 197.) qu'on trouvera la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion décroiſſante à l'infini, dont on connoîtra ſeulement les deux premiers termes, en diviſant le Quarré du premier terme par la différence du premier terme au ſecond.

Par exemple, ſi *AB*, *BC*, ſont les deux premiers termes d'une Progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, la ſomme du nombre infini de termes qu'elle contiendra ſera exprimée par $\frac{AB \times AB}{AB - BC}$.

Corollaire IV.

COROLLAIRE IV.

242 La Quantité $\frac{AB \times AB}{AB - BC}$, qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression décroissante à l'infini, peut être écrite sous cette forme $\frac{AB}{AB - BC} \times AB$.

Divisant par BC le numérateur & le dénominateur de la Fraction ou du Rapport $\frac{AB}{AB - BC}$, la derniere quantité qui représente la somme de tous les termes d'une Progression décroissante à l'infini, prendra cette forme $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times AB$, comme on l'a fait voir (N°. 240.).

Or $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1}$ est le Quotient de la Raison de la Progression divisée par un nombre plus petit qu'elle d'une unité.

Donc on aura la somme de tous les termes d'une Progression géométrique décroissante à l'infini, en divisant la Raison de la Progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le Quotient de cette Division par le premier terme de la Progression.

Cette Proposition a déjà été démontrée dans l'Arithmétique (No. 196.).

REMARQUE.

La formule $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times (AB - EF) + EF$, qu'on trouve dans le Corollaire second, pour sommer une Progression géométrique dont les deux premiers termes sont AB & BC, ou dont la Raison est $\frac{AB}{BC}$.

& dont le dernier terme eſt EF, peut être écrite ſous cette forme $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times AB - \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times EF + EF$.

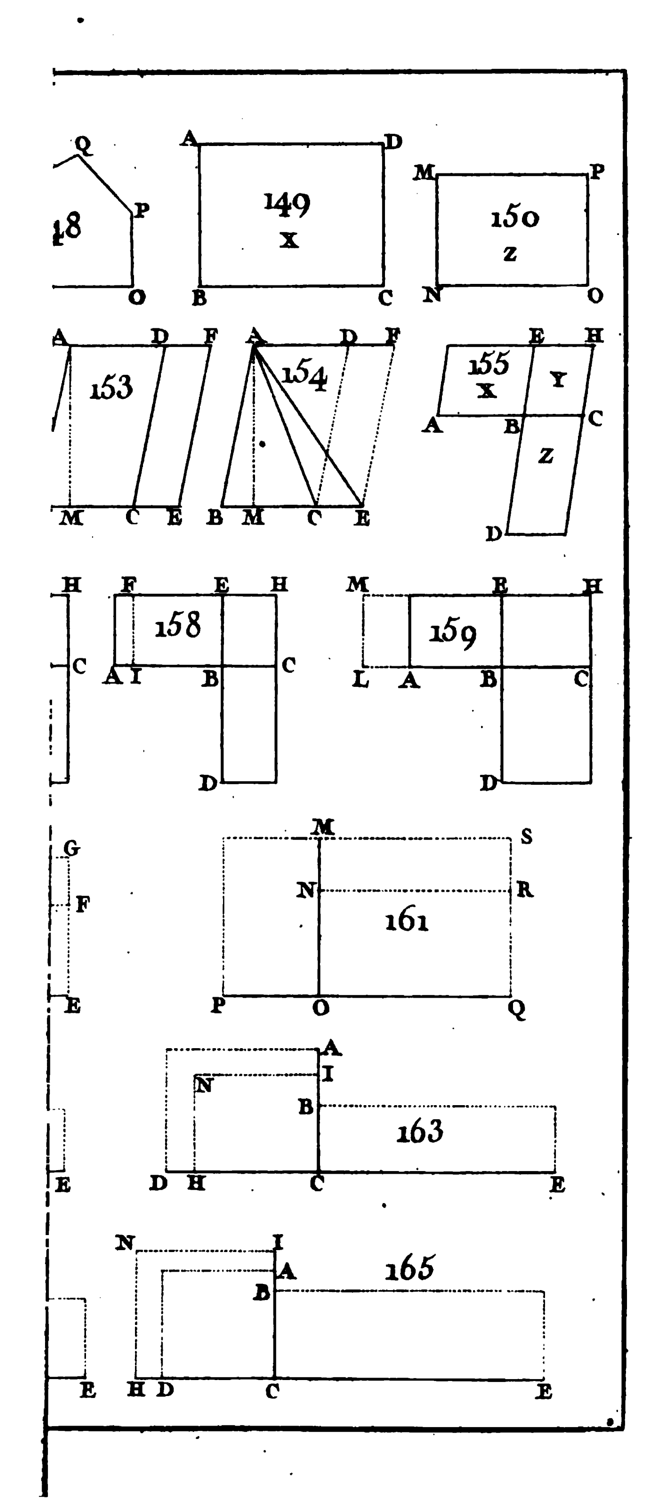
En examinant cette expreſſion, l'on découvre que

1°. La 1ere. partie $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times AB$ repréſente la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion pouſſée à l'infini, dont le 1er. terme eſt AB & la Raiſon $\frac{AB}{BC}$.

2°. La 2e. partie $\frac{\left(\frac{AC}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times EF$ repréſente la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion pouſſée à l'infini, dont le 1er. terme eſt EF & la Raiſon $\frac{AB}{BC}$.

Ainſi $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times AB - \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right)-1}\times EF$ repréſente la différence de deux Progreſſions pouſſées à l'infini, dont la Raiſon eſt $\frac{AB}{BC}$ & les premiers termes AB & EF. Donc cette expreſſion eſt la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier dans une Progreſſion, dont les deux premiers termes ſont AB, BC, & le dernier EF: en ſorte que la ſommation d'un nombre fini de termes d'une même Progreſſion contient formellement les ſommes de deux Progreſſions pouſſées à l'infini, dont l'une eſt ſouſtraite de l'autre.

3°. Comme la ſomme des termes de la Progreſſion infinie ſouſtraite contient le dernier des termes de la Progreſſion finie qui fait partie de l'autre Progreſſion infinie, la troiſiéme partie $+EF$ qui ſe trouve dans l'expreſſion de la ſomme des termes de la Progreſſion finie, rétablit ce qu'on ôte de trop en ôtant la ſeconde Progreſſion infinie de la premiere.



Q
P
48
O
A
D
149
X
B
C
M
P
150
Z
N
O
A
D
F
153
M
C
E
A
D
F
154
B
M
C
E
E
H
155
X
Y
A
B
C
Z
D
H
C
F
E
H
158
A
I
B
C
D
M
E
H
159
L
A
B
C
D
G
F
E
M
S
N
R
161
P
O
Q
A
I
N
B
163
E
D
H
C
E
N
I
A
165
B
E
H
D
C
E



ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.

LIVRE IV.

Des Figures semblables & des Lignes proportionnelles dont elles sont composées.

DÉFINITIONS.

1°. 243 DEux Figures *ABCDE*, *MNOPQ*, d'un même nombre de côtés, sont nommées semblables, lorsqu'elles ont tous les Angles égaux chacun à chacun, & tous les côtés directement proportionnels autour des mêmes Angles; c'est-à-dire, si les Angles *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, sont égaux aux Angles *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, chacun à chacun, & si *AB* : *BC* : *CD* : *DE* : *EA* : : *MN* : *NO* : *OP* : *PQ* : *QM* ou *AB*:*MN*::*BC*:*NO*::*CD*:*OP*::*DE*:*PQ*::*EA*:*QM*. Fig. 166 & 167.

2°. Les côtés adjacens aux Angles égaux de deux Figures semblables, s'appellent *Côtés homologues* ou *Côtés correspondans*. Ainsi *AB*, *MN*, sont deux côtés homologues.

Avertissement.

244 Lorsque plusieurs Figures seront semblables, dans quelque situation qu'elles puissent être, on les nommera de façon que les lettres qui désigneront les Angles égaux, tiendront les mêmes lieux dans les nominations de ces Figures; en sorte que les lettres qui désigneront les côtés homologues qu'on pourra comparer, y tiendront aussi le même lieu.

Fig. 166 & 167. Par exemple, lorsqu'on dira que deux Polygones *ABCDE*, *MNOPQ*, sont semblables, on entendra que *l'Angle* A=M, *l'Angle* B=N, *l'Angle* C=O, *l'Angle* D=P, &c.; & que les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, du Polygone *ABCDE*, sont homologues aux côtés *MN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QM*, qui tiennent les mêmes lieux dans la nomination du Polygone *MNOPQ*.

Fig. 176 & 177. Lorsque deux Triangles, tels que *ABC*, *PQR*, seront semblables, & qu'on aura *l'Angle* A=P, *l'Angle* B=Q, *l'Angle* C=R, on les désignera par *ABC*, *PQR*, ou *BAC*, *QPR*, ou *ACB*, *PRQ*, ou enfin de telle autre maniere qu'on voudra, pourvû que les lettres qui désigneront les Angles égaux tiennent les mêmes lieux dans les nominations: mais jamais on ne les nommera *ABC*, *QPR*, ni *ACB*, *PQR*; parce que dans ces nominations, les lettres qui appartiennent aux sommets des Angles égaux, ne tiennent pas les mêmes lieux.

Cette attention de nommer les Polygones semblables & les Triangles semblables, de maniere que les lettres qui désignent les Angles égaux tiennent les

mêmes lieux, est très utile pour reconnoître les côtés correspondans que l'on doit comparer ensemble lorsqu'on a des Proportions à faire.

Par exemple, si deux Triangles semblables *ABC*, *PQR*, sont nommés de maniere que les lettres des Angles égaux tiennent les mêmes lieux, il sera aisé de voir que le côté *AB*, désigné par les deux premieres lettres de *ABC*, doit être comparé avec le côté *PQ* désigné par les deux premieres lettres de *PQR*; que le côté *BC*, désigné par les deux dernieres lettres de *ABC*, le doit être avec le côté *QR* désigné par les deux dernieres lettres de *PQR*; & qu'enfin le côté *AC*, désigné par les lettres extrêmes de *ABC*, doit être comparé avec le côté *PR* marqué par les lettres extrêmes de *PQR*; en sorte que pour désigner que les deux Triangles semblables *ABC*, *PQR*, ont les côtés proportionnels, on écrira

$$AB : BC : AC :: PQ : QR : PR.$$

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes coupées proportionnellement, des Triangles semblables, & des Lignes qui concourent en un même Point.

THÉORÉME.

245 SI *l'on coupe un Triangle* BAC *par une Droite* MN *paralléle à un côté* BC, *les deux autres côtés* AB, AC, *seront coupés proportionnellement; c'est-à-dire, qu'on aura* $AB : AM :: AC : AN$. Fig. 168.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les Droites *MC*, *NB*: les Triangles

BMN, *CMN*, feront égaux; car ils auront même base *MN*, & feront compris entre mêmes Paralléles *MN*, *BC*. Ajoûtant à chacun le Triangle *MAN*, on aura le Triangle $BNA = CMA$. Mais ces Triangles égaux ont un Angle égal ou commun en *A*. Donc (*N°*. 200.) ils ont les côtés réciproques, c'est-à-dire, que

$$AB : AM :: AC : AN.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 168. 246 Donc si un Triangle *BAC* est coupé par une Droite *MN* parallele à un côté *BC*, l'on aura

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC.$$

Car suivant le Théorême

$$AB : AM :: AC : AN.$$

Ainsi l'on aura *Convertendo* (*N°*. 222.)

$$AB : AB - AM :: AC : AC - AN,$$

c'est-à-dire, $AB : MB :: AC\ NC$.

Changeant encore cette nouvelle Proportion *Dividendo* (*N°*. 220.), l'on aura

$$AB - MB : MB :: AC - NC : NC,$$

c'est-à-dire, $AM : MB :: AN : NC$.

Enfin alternant la premiere & la troisiéme Proportion, l'on aura (*N°*. 206.)

$$AB : AC :: AM : AN$$

$$AM : AN :: MB : NC.$$

Mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & leurs Conséquens dans une autre Suite, on aura

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC.$$

COROLLAIRE II.

247 Si le Triangle BAC est coupé par deux Droites MN, PQ, paralleles à l'un BC de ses côtés, les deux autres côtés AB, AC, seront divisés proportionnellement, & l'on aura Fig. 169.

$$AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.$$

Car puisque MN est parallele à BC, on aura (N°. 246.)

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC,$$

c'est-à-dire, $AB : AC :: AM : AN :: MB : NC$.

Et puisque PQ est aussi parallele à BC, on aura encore (N°. 246.)

$$AB : AP : PB :: AC : AQ : QC,$$

c'est-à-dire, $AB : AC :: AP : AQ :: PB : QC$.

Et comme tous les Rapports qu'on vient de trouver sont égaux à celui de AB à AC, on aura $AM : AN :: AP : AQ$.

Mais (N°. 224.) $AM : AN :: AM - AP : AN - AQ$, c'est-à-dire, $AM : AN :: PM : QN$.

Ainsi puisque le Rapport de AM à AN est déjà dans la liste des Rapports égaux à celui de AB à AC, celui PM à QN peut aussi être placé dans la liste de ces Rapports. On aura donc

$$AB : AC :: AM : AN :: MB : NC :: AP : AQ :: PB : QC :: PM : QN,$$

ou $AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN$.

Si le Triangle BAC étoit coupé par une troisiéme ou une quatriéme Ligne &c parallele à sa base, on démontreroit de la même maniere que les parties correspondantes des deux Lignes coupées seroient proportionnelles.

Corollaire III.

Fig. 170. 248 Une Droite AD qui divisera en deux parties égales un Angle BAC, partagera le côté BC opposé à cet Angle, en parties BD, DC, proportionnelles aux côtés AB, AC, du même Angle ; c'est-à-dire, que l'on aura $BD:DC::AB:AC$.

Car si l'on prolonge AC d'une quantité $AE=AB$, & qu'on tire BE, l'on aura un Triangle isoscele BAE, dont les Angles E & ABE à la base seront égaux (*N*°. 111.) : & comme la somme de ces deux Angles intérieurs est égale à l'Angle extérieur BAC (*N*°. 109.), chacun d'eux sera égal à la moitié de l'Angle BAC qu'on suppose divisé en deux parties égales par AD. On aura donc l'*Angle* $E=DAC$. Ainsi AD sera paralléle à EB (*N*°. 47.) ; & par conséquent on aura (*N*° 246.)

$$BD:DC::AE:AC,$$

ou (parce qu'on a fait $AE=AB$)

$$BD:DC::AB:AC.$$

Scholie.

Fig. 169. 249 1°. Ce Théorême & ses Corollaires fournissent une pratique aisée pour diviser une Droite donnée AC, en parties proportionnelles à celles AP, PM, MB, d'une autre Ligne droite AB.

Car si l'on fait faire aux deux Droites AB, AC, un Angle quelconque BAC, dont le sommet A soit à l'extrémité commune de ces deux Lignes ; & qu'ayant tiré par les deux autres extrémités une Droite BC, on lui mene par les Points de Division P, M, de la Droite AB, des Paralleles PQ, MN ; ces Paralleles diviseront la Droite AC en parties pro-

portionnelles à celles de la Droite *AB* (N°. 247.) : c'est-à-dire, que l'on aura

$$AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN;$$

& par conséquent

$$AP : PM : MB :: AQ : QN : NC.$$

2°. On déduit aussi du même Théorême la maniere de diviser une Droite *AC*, en autant de parties égales que l'on veut. Car si par l'extrémité *A* de la Droite *AC*, l'on mene une Droite indéfinie *AB*; & qu'ayant pris sur elle, à commencer du Point *A*, autant de parties égales *AP*, *PM*, *MB*, de grandeur quelconque, que l'on veut de parties égales dans *AC*, l'on tire la Droite *BC*, & qu'on lui mene par les Points de division *P*, *M*, de la Droite *AB*, des Paralleles *PQ*, *MN*; ces Paralleles diviseront la Droite *AC* en autant de parties égales qu'il y en a dans la Droite *AB*, & par conséquent en autant de parties égales qu'on en vouloit; puisqu'on aura

$$AP : PM : MB :: AQ : QN : NC,$$

& que les parties *AP*, *PM*, *MB*, de la Droite *AB*, étant égales entr'elles (*Construction*), les parties *AQ*, *QN*, *NC*, de la Droite *AC*, seront aussi égales entr'elles.

3°. On déduira aussi de ce Théorême une pratique pour trouver une quatriéme proportionnelle à trois Lignes données *ab*, *am*, *ac*. Pour cela, on fera un Angle quelconque *XAZ* : puis ayant pris sur un côté *AX*, à commencer du Sommet *A*, deux parties *AB*, *AM*, égales aux deux premieres proportionnelles *ab*, *am*, & ayant pris sur le second côté *AZ*, une partie *AC* égale à la troisiéme proportionnelle *ac*, Fig. 171 & 172.

on tirera par les extrémités *B*, *C*, des Antécédens; c'est-à-dire, de la premiere & de la troisiéme proportionnelles, une Droite *BC*; & par le Point *M* on ménera à cette Droite *BC* une Parallele *MN*, qui coupera nécessairement dans le côté *AZ* une partie *AN*, égale à la quatriéme proportionnelle qu'on demande; puisque (*N°*. 245.) on aura

$$AB : AM :: AC : AN,$$

& par conséquent $ab : am :: ac : AN$.

On peut faire quelque changement à la derniere construction, & déterminer une quatriéme proportionnelle à trois Lignes données *am*, *mb*, *an*, comme il suit.

Fig. 172 & 173. On fera un Angle quelconque *XAZ* : puis ayant pris sur un côté *AX* deux parties de suite *AM*, *MB*, égales aux deux premieres proportionnelles *am*, *mb*, & sur le second côté *AZ* une partie *AN* égale à la troisiéme proportionnelle *an*, on tirera par les extrémités de la premiere & de la troisiéme proportionnelles transportées sur les côtés de l'Angle, une Droite *MN*; & lui ayant mené par le Point *B* une Parallele *BC*, la partie *NC* du côté *AZ*, comprise entre ces deux Paralleles, sera la quatriéme proportionnelle demandée. Car (*N°*. 246.) on aura

$$AM : MB :: AN : NC,$$

& par conséquent $am : mb :: an : NC$.

4°. La méthode pour trouver une troisiéme proportionnelle à deux Lignes données, est parfaitement semblable à celles qu'on vient d'expliquer pour trouver une quatriéme proportionnelle à trois Lignes. Car une troisiéme proportionnelle à deux Lignes données *AB*, *AM*, est une quatriéme proportionnelle à trois Lignes *AB*, *AM*, *AM*; dont la troisiéme est égale à la seconde.

THÉORÊME.

250 *Si les côtés* AB, AC, *d'un Triangle* BAC, *sont coupés proportionnellement, c'est-à-dire, de maniere que l'on ait* AB : AM :: AC : AN, *la Sécante* MN *sera parallele à la base* BC. Fig. 168.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les Droites NB, MC : les Triangles BNA, CMA, seront égaux (N°. 195.) ; car ils auront un Angle commun ou égal en A : & puisque $AB : AM :: AC : AN$, ils auront les côtés réciproques autour de leur Angle égal.

Otant de chacun le Triangle MAN, on aura le Triangle $BMN = CMN$.

Mais ces Triangles égaux ont même base MN.

Donc (N°. 139.) les Droites MN, BC, entre lesquelles ils sont situés, sont paralleles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

251 Puisque la Droite MN qui coupe un Triangle BAC est parallele à sa base BC, lorsqu'on a

$$AB : AM :: AC : AN;$$ Fig. 168.

1°. Lorsqu'on aura *Invertendo*

$$AM : AB :: AN : AC,$$

Il est visible que la même Sécante MN sera aussi parallele à la base BC.

2°. La même Sécante sera encore parallele à la base MN, lorsqu'on aura

$$MB : AM :: NC : AN;$$

puisqu'alors on aura *Componendo* (N°. 210.)

$$MB + AM : AM :: NC + AN : AN,$$

c'est-à-dire, $AB : AM :: AC : AN$, comme dans l'hypothèse du Théorême.

3°. Enfin la même Sécante sera parallele à la base *BC*, lorsqu'on aura

$$AB : MB :: AC : NC.$$

Car alors on aura *Convertendo* (N°. 222.)

$$AB : AB - MB :: AC : AC - NC,$$

c'est-à-dire, $AB : AM :: AC : AN$, de même que dans l'hypothèse du Théorême.

COROLLAIRE II.

Fig. 174. ou 175. 252 Donc si l'on coupe les quatre côtés d'un Quadrilatere *ABDC* aux Points *M*, *N*, *P*, *Q*, de maniere que l'on ait

$$AB : AC : DB : DC :: AM : AN : DP : DQ,$$

les quatre Lignes qui joindront ces quatre Points formeront un Parallélogramme *MPQN*.

Pour le démontrer, soient tirées les deux Diagonales *AD*, *BC*.

1°. Dans le Triangle *BAC*,
Puisque $AB : AM :: AC : AN$,
MN sera parallele à *BC* (N°. 250.) :
Et comme dans le Triangle *BDC*,
$DB : DP :: DC : DQ$,
PQ sera aussi paralléle à *BC*.
Ainsi *MN*, *PQ*, seront paralléles.

2°. Dans le Triangle *ABD*,
Puisque $AB : AM :: DB : DP$,
MP sera paralléle à *AD* (N°. 251.) :
Et comme dans le Triangle *ACD*,
$AC : AN :: DC : DQ$,
NQ sera aussi paralléle à *AD*.
Ainsi *MP*, *NQ*, seront paralléles.

Donc les côtés opposés du Quadrilatere *MPQN* seront paralléles ; & (N°. 124.) ce Quadrilatere sera par conséquent un Parallélogramme.

THÉORÈME.

253 *Deux Triangles* BAC, CMN, *sont semblables, quand ils ont les Angles égaux chacun à chacun; c'est-à-dire, si l'*Angle $BAC=CMN$, *l'*Angle $ACB=MNC$, *& par conséquent l'*Angle $ABC=MCN$. Fig. 178

DÉMONSTRATION.

Soient disposés les Triangles de maniere que leurs côtés homologues BC, CN, soient en Ligne droite, & soient prolongés les côtés BA, NM, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un Point O.

Les Droites AC, ON, seront paralleles (*N*°. 47.); car l'Angle $ACB=MNC$ (*hyp.*).

Les Droites OB, MC, seront aussi paralleles (*N*°. 47.); puisque l'Angle $ABC=MCN$ (*hyp.*).

Donc (*N*°. 124.) OC sera un Parallélogramme, & aura par conséquent les côtés opposés égaux (*N*°. 129.).

Mais AC étant parallele à ON, on aura (*N*°. 247.)

$$BA:AO::BC:CN;$$

Et MC étant parallele à OB, on aura aussi

$$BC:CN::OM:MN.$$

Donc en mettant CM pour AO, & AC pour OM dans ces deux Proportions, on aura

$$BA:CM::BC:CN::AC:MN,$$

ou $BA:BC:AC::CM:CN:MN$.

Donc les Triangles BAC, CMN, qui ont les Angles égaux, ont aussi les côtés proportionnels autour des mêmes Angles, & sont par conséquent semblables (*N*°. 243.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

254 *Comme deux Triangles ne peuvent point avoir deux Angles égaux chacun à chacun, sans que tous leurs*

Angles ſoient égaux chacun à chacun ; & que d'ailleurs on n'a employé que deux Angles égaux chacun à chacun pour démontrer que les Triangles ont les côtés proportionnels ;

1°. Lorſque nous voudrons prouver dans la ſuite que deux Triangles ſont ſemblables, nous nous contenterons de faire voir qu'ils ont deux Angles égaux chacun à chacun.

2°. Lorſque nous voudrons faire ſur une Ligne donnée un Triangle ſemblable à un Triangle donné, nous nous contenterons de faire avec la Ligne donnée deux Angles égaux à deux Angles du Triangle donné.

Corollaire I.

Fig. 179 & 180. 255 1°. On peut conclurre de ce Théorême que deux Triangles iſoſceles *BAC*, *QPR*, ſont ſemblables, quand ils ont un Angle égal à la baſe.

Car deux Triangles iſoſceles ne peuvent point avoir un Angle égal à la baſe, ſans avoir les deux Angles à la baſe égaux chacun à chacun. Ainſi ils ſont ſemblables.

2°. Deux Triangles iſoſceles *BAC*, *QPR*, ſont ſemblables, lorſqu'ils ont un Angle égal entre leurs côtés égaux.

Car ſi les Angles *A* & *P* des ſommets des deux Triangles iſoſceles *BAC*, *QPR*, ſont égaux, la ſomme des deux Angles *B* & *C* qui ſont à la baſe du premier, ſera égale à la ſomme des deux Angles *Q* & *R* qui ſont à la baſe du ſecond ; & par conſéquent la moitié de la ſomme des deux Angles *B* & *C* ſera égale à la moitié de la ſomme des deux Angles *Q* & *R*.

Mais les deux Triangles *BAC*, *QPR*, étant iſoſceles, les deux Angles *B* & *C* ſont égaux, & les deux Angles *Q* & *R* ſont pareillement égaux (N°. 113.).

Ainsi l'Angle *B* est la moitié de la somme des deux Angles *B* & *C*; & l'Angle *Q* est la moitié de la somme des deux Angles *Q* & *R*.

Donc les Angles *B* & *Q*, qui sont aux bases des deux Triangles isosceles *BAC*, *QPR*, sont égaux. Ainsi on conclurra, comme dans la premiere partie de ce Corollaire, que ces deux Triangles isosceles sont semblables.

COROLLAIRE II.

256 Donc deux Triangles *ABC*, *PQR*, sont semblables, quand ils ont les côtés paralléles chacun à chacun; car ils ne peuvent pas avoir les côtés ainsi paralléles, sans avoir les Angles égaux chacun à chacun. Fig. 176 & 177.

Nous ne parlons ici que des Triangles qui sont dans un même Plan; mais dans la suite nous ferons voir que deux Triangles qui ont les côtés paralléles, sont semblables, lors même qu'ils sont dans différens Plans.

COROLLAIRE III.

257 Donc deux Triangles *ABC*, *PQR*, sont semblables, quand les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre chacun à chacun. Car si l'on fait faire un quart de révolution au Triangle *PQR*, dans le Plan où il est, il est clair que les côtés de ce Triangle, qui sont (*hyp.*) perpendiculaires sur ceux du Triangle *ABC*, deviendront paralléles aux mêmes côtés du Triangle *ABC*; & l'on verra alors que ces deux Triangles ont les Angles égaux, & que par conséquent ils sont semblables. Fig. 184.

On peut encore démontrer comme il suit, que les deux Triangles ABC, PQR, *sont semblables.*

Soit prolongé *PQ* jusqu'au côté *AB*, & *BC* jusqu'au côté *QR*.

1°. Le Quadrilatere *ADPE* aura deux Angles droits en *D*, *E* : & comme les quatre Angles de ce Quadrilatere valent ensemble quatre droits (*N°*. 123.), les deux autres *A*+*DPE* vaudront ensemble deux droits. Mais *QPR*+*DPE* valent aussi ensemble deux droits (*N°*. 21.). Donc l'*Angle* *A*=*QPR*.

2°. Le Quadrilatere *ECFR* aura deux Angles droits en *E*, *F* : & comme les quatre Angles de ce Quadrilatere valent ensemble quatre droits (*N°*. 123.), les deux autres *R*+*ECF* vaudront ensemble deux droits. Mais *ACB*+*ECF* valent ensemble deux droits (*N°*. 21.). Donc l'*Angle* *ACB*=*R*.

Ainsi les Triangles *ABC*, *PQR*, ont deux Angles égaux chacun à chacun, & sont par conséquent semblables.

On doit remarquer ici que si deux Triangles semblables ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, les côtés de l'un seront homologues à ceux de l'autre sur lesquels ils seront perpendiculaires.

SCHOLIE.

Fig. 185 & 186. 258 Ce Théorême conduit à une pratique pour trouver une quatriéme proportionnelle à trois Lignes données *am*, *ab*, *mn*.

On tirera une Droite *AX*, sur laquelle, à commencer du point fixe *A*, on prendra *AM* égale à la premiere proportionnelle *am*, & *AB* égale à la seconde proportionnelle *ab*. Puis par l'extrémité *M* de la premiere proportionnelle, on tirera suivant une direction quelconque une Droite *MN*, égale à la troisiéme proportionnelle *mn* ; & après avoir mené la Droite indéfinie *ANZ*, on tirera par le point *B*, & parallélement à *MN*, une Droite *BC*, qui étant terminée par les deux côtés de l'Angle *XAZ*, sera la quatriéme proportionnelle demandée.

Car

Car par cette construction l'on fait deux Triangles *MAN*, *BAC*, qui ont un Angle commun en *A*, & un Angle $AMN = ABC$, à cause des Paralleles *MN*, *BC*. Ainsi ces Triangles sont semblables, & donnent par conséquent

$$AM : AB :: MN : BC,$$

c'est-à-dire, $am : ab :: mn : BC$.

THÉORÊME.

259 *Deux Triangles* BAC, MAN, *sont semblables, quand ils ont un Angle égal entre deux côtés proportionnels.* Fig. 181.

DÉMONSTRATION.

Deux Triangles qui ont un Angle égal peuvent être représentés par les Triangles *BAC*, *MAN*, qui ont un Angle *A* commun. Or comme (*hyp.*) les deux côtés qui renferment l'Angle égal sont proportionnels, on a $AB : AM :: AC : AN$. Ainsi (*N*°. 250.) la Droite *MN* est parallele à la base *BC*; & par conséquent les trois Angles du Triangle *MAN* sont égaux aux trois Angles du Triangle *BAC*: d'où il suit (*N*°. 253.) que les deux Triangles *BAC*, *MAN*, sont semblables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

260 Si sur les côtés égaux *AB*, *AC*, d'un Triangle isoscele ou équilatéral *BAC*, prolongés s'il est nécessaire, on prend, à commencer du sommet *A*, deux parties égales *AM*, *AN*, on aura Fig. 179 & 181, ou 182 & 183.

$$AB : AM :: AC : AN;$$

& si l'on tire la Droite *MN*, les deux Triangles *BAC*, *MAN*, auront un Angle égal ou commun *A* entre côtés proportionnels, & seront par conséquent sembla-

bles (*N*°.259.); d'où il suit que si le Triangle *BAC* est équilatéral, le Triangle *MAN* sera aussi équilatéral.

Si sur les mêmes côtés égaux *AB*, *AC*, d'un Triangle isoscele ou équilatéral *BAC*, l'on eût pris, à commencer de la base, des parties égales *BM*, *CN*, il est évident qu'on auroit eu aussi $AM = AN$: d'où il suit que les Triangles *BAC*, *MAN*, auroient été semblables, & que le Triangle *MAN* auroit été équilatéral, si le Triangle *BAC* l'avoit été.

Il est naturel de conclurre de ce Corollaire que deux Triangles isosceles *BAC*, *MAN*, sont semblables, lorsque leurs côtés égaux contiennent le même Angle ou un Angle égal.

Cette derniere conséquence a déjà été démontrée au *N*°. 255.

THÉORÊME.

Fig. 187 & 188. 261 *Deux Triangles* ABC, PQR, *sont semblables, quand ils ont les trois côtés proportionnels, c'est-à-dire,*

Si $AB : AC : BC :: PQ : PR : QR$,

ou Si $AB : PQ :: AC : PR :: BC : QR$.

Démonstration.

Soient prolongés deux côtés *PQ*, *PR*, du plus petit Triangle, jusqu'à ce qu'ils deviennent égaux à leurs homologues *AB*, *AC*; c'est-à-dire, soit fait $PM = AB$, $PN = AC$, & soit tirée la Droite *MN*.

1°. Puisque (*hyp.*) $AB : PQ :: AC : PR$, on aura $PM : PQ :: PN : PR$. Ainsi les deux Triangles *PQR*, *PMN*, seront semblables (*N*°. 259.).

2°. (*Hyp.*) $BC : QR :: AB : PQ$, ou $:: PM : PQ$; & à cause des Triangles semblables *PMN*, *PQR*,

$$PM : PQ :: MN : QR.$$

Ainsi $BC : QR :: MN : QR$, & par conséquent $BC = MN$.

Mais (*Construction*) $AB = PM$, $AC = PN$.

Donc les deux Triangles ABC, PMN, sont parfaitement égaux (*N°.* 118.) : & comme on vient de démontrer que l'un PMN de ces deux Triangles égaux est semblable au Triangle PQR, il est clair que l'autre Triangle ABC est aussi semblable au même Triangle PQR. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÊME.

262 *Si des extrémités* B, E, *& de différens Points* C, D, *d'une même Droite* BE, *on tire par un même Point* A *des Droites indéfinies* AB, AC, AD, AE ; *toute Droite comme* MP, *parallèle à* BE, *qui se trouvera coupée par ces lignes* AB, AC, AD, AE, *sera divisée en parties proportionnelles à celles de la Droite* BE ; *c'est-à-dire, qu'on aura* Fig. 189 ou 190.

BC : CD : DE :: MN : NO : OP.

DÉMONSTRATION.

Les Triangles	*BAC*, *MAN*	qui sont semblables deux à deux, donneront	*BC* : *MN* :: *AC* : *AN*
	CAD, *NAO*		*AC* : *AN* :: *CD* : *NO* ou :: *AD* : *AO*
	DAE, *OAP*		*AD* : *AO* :: *DE* : *OP*.

Et en ne prenant de ces Rapports égaux que ceux dont on a besoin, & dont les termes sont des parties de BE & de MP, on aura

$BC : MN :: CD : NO :: DE : OP$,

ou $BC : CD : DE :: MN : NO : OP$.

Ce qu'il falloit démontrer.

263 *On voit par ce Théorême que pour diviser une Ligne droite* MP, *en parties proportionnelles à celles* BC, CD, DE, *d'une Droite* BE, *l'on peut placer la* Fig. 187 ou 188.

Droite MP *parallélement à* BE; *puis mener par les extrémités* B, M, & E, P, *de ces deux Lignes, des Droites* BM, EP, *qui se rencontrent en un Point* A; *ensuite tirer par ce Point de rencontre* A, & *par les Points de division de la Ligne* BE, *des Droites* CN, DO, *qui couperont nécessairement la Droite* MD *en parties* MN, NO, OP, *proportionnelles à celles* BC, CD, DE, *de la Droite* BE.

Fig. 191. *Lorsqu'on aura plusieurs Lignes droites données de différentes grandeurs à diviser en parties proportionnelles à celles* BC, CD, DE, *d'une Droite* BE; *au lieu de faire pour chaque Ligne à diviser une opération semblable à celle qu'on vient d'expliquer, ce qui deviendroit trop long, on décrira sur la Droite* BE, *actuellement divisée, un Triangle équilatéral* BAE; & *du sommet* A *de l'Angle opposé à* BE, *l'on tirera par tous les Points de division* C, D, &c. *de ce côté* BE, *des Droites* CA, DA, &c, *qu'on prolongera, s'il est nécessaire, indéfiniment au-delà de* BE. *Ensuite on prendra sur les côtés* AB, AE, *prolongés s'il est nécessaire, deux parties* AM, AP, *ou* Am, Ap, *égales à la Ligne quelconque qu'on veut diviser en parties proportionnelles à celles de* BE; *puis on tirera la Droite* MP, *ou* mp, *qui sera nécessairement parallele à* BE, & *qui sera par conséquent divisée en parties proportionnelles à celles de* BE.

Comme les Triangles MAP, mAp, *seront semblables au Triangle équilatéral* BAE (*N°.* 260.), *les Droites* MP, mp, *qu'on a divisées en parties proportionnelles à celles de* BE, *seront égales aux Droites* AM, Am, *qui* (Construction) *ont été faites égales aux Droites qu'on devoit diviser.*

THÉORÊME.

264 *Si de deux Points* P, Q, *d'une Droite* PQ, *partent deux Paralleles* PO, QR, *inégales, & deux autres Paralleles* PM, QN, *proportionnelles aux deux premieres, c'est-à-dire, telles que l'on ait* PM : QN :: PO : QR; *les deux Droites* OR, MN, *menées par les extrémités de ces Lignes qui sont paralleles deux à deux, étant prolongées, s'il est nécessaire, iront concourir en un même Point* S *avec la Droite* PQ, *aussi prolongée, s'il est nécessaire.* Fig. 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198 & 199.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose que la Droite OR rencontre la Droite PQ en S, & que MN la rencontre en T, il faudra démontrer que le Point S & le Point T se confondent, ou ne sont qu'un seul & même Point.

1°. Les Triangles MPT, NQT, seront semblables, & donneront

$PT : QT :: PM : QN$.

2°. Par hyp. $PM : QN :: PO : QR$.

3°. Les Triangles OPS, RQS, seront aussi semblables, & donneront $PO : QR :: PS : QS$.

Donc on aura $PT : QT :: PS : QS$.

Changeant cette Proportion *Dividendo*, l'on aura

$$PT - QT : QT :: PS - QS : QS,$$

c'est-à-dire, $PQ : QT :: PQ : QS$; & par conséquent $QT = QS$ (N°. 190.). Fig. 192, 193, 194 & 195.

Ainsi le Point T & le Point S se confondront.

Changeant la même Proportion *Componendo*, on aura Fig. 196, 197, 198 & 199.

$$PT + QT : QT :: PS + QS : QS,$$

c'est-à-dire, $PQ : QT :: PQ : QS$; & par conséquent $QT = QS$ (No. 190.).

Ainsi le Point T & le Point S se confondront.

Donc enfin dans tous les cas les Points *T*, *S*, se confondront, ou ne seront qu'un seul & même Point. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Le Théorême qu'on vient de démontrer conduit naturellement au Problême suivant.

PROBLÊME.

Fig. 200, 201, 202 & 203. 265. *Par un Point donné* P, *mener une Droite* PQ *qui aille au Point de concours de deux autres Droites* AB, CD, *lorsque ce Point de concours est trop éloigné pour être déterminé.*

Solution.

Après avoir tiré par le Point donné *P* une Droite *POM* qui rencontre les deux Lignes données *AB*, *CD*, en deux Points quelconques *O*, *M*, & après lui avoir mené par tel Point qu'on voudra, une Parallele *QRN* qui rencontre les mêmes Lignes données en deux Points *R*, *N*, sur la portion *MO* de la premiere Parallele, comprise entre les deux Lignes *AB*, *CD*, on fera un Triangle équilatéral *MSO*.

Puis ayant pris sur la seconde Parallele *QRN*, la longueur de la partie *NR* comprise entre les deux Lignes données, & l'ayant portée en *Sn* & *Sr*, sur les côtés *SM*, *SN*, du Triangle équilatéral, prolongés, s'il est nécessaire, on tirera la Droite *nr*; ce qui donnera (N°. 260.) un Triangle équilatéral *nSr*, & par conséquent $nr = Sn$; & comme on a fait $Sn = NR$, on aura aussi $nr = NR$.

Ensuite par le Sommet S du Triangle équilatéral, & par le Point donné *P*, on ménera une Droite *SP*, qui prolongée, s'il est nécessaire, coupera en *q* la Droite *nr*, aussi prolongée, s'il est nécessaire.

Enfin ayant pris la longueur de qr, & l'ayant portée en QR sur QRN, on ménera par le Point Q ainsi déterminé, & par le Point donné P, une Droite PQ, qui sera nécessairement dirigée vers le Point de concours des deux Droites données AB, CD.

Car par cette construction l'on aura (N°. 262.)

$$PM : PO :: qn : qr.$$

Mais on a fait $QR = qr$; & ces deux parties égales étant retranchées des deux Lignes NR, nr; qu'on a trouvées égales, on aura $QN = qn$. Ainsi en mettant QN & QR à la place de qn & qr, on aura

$$PM : PO :: QN : QR;$$

& par conséquent les trois Droites AB, CD, PQ, concourront en un même Point (N°. 264.).

Si le Point donné P, par lequel il faut mener la Droite PQ, n'est pas entre les deux Droites données AB, CD, & que les deux Droites SP, nr, se coupent trop obliquement, pour qu'on apperçoive nettement leur Section q, il sera difficile de prendre exactement la longueur de qr, pour la porter en QR. Ainsi l'on pourra faire quelqu'erreur, en plaçant le second Point Q, par lequel il faut tirer la Ligne demandée PQ. Fig. 201 ou 203.

Pour diminuer l'erreur qu'on peut craindre en ce cas, on ne tirera pas la Droite SP; mais après avoir pris sur PM une partie $M\pi = OP$, on ménera la Droite $S\pi$, qui prolongée, s'il est nécessaire, coupera la Droite nr en k, beaucoup plus nettement que la Droite SP ou son prolongement ne l'auroit coupée en r : & comme les deux parties qr, NK, sont égales, attendu qu'elles sont proportionnelles aux deux parties PO, $M\pi$, qui sont égales par construction, au lieu de qr, on prendra nk pour le porter en QR; & par ce moyen le Point Q sera déterminé plus exactement, que si l'on avoit pris qr pour le porter en QR.

CHAPITRE II.

Des Polygones semblables en général.

266 ON a dit (*N°*. 243.) que deux Polygones, pour être semblables, doivent avoir tous les Angles égaux chacun à chacun, & les côtés homologues proportionnels ; & l'on a expliqué (*N°*. 244.) les attentions qu'il faut avoir en écrivant les noms des Polygones semblables, afin de reconnoître dans leurs nominations, quels sont les côtés homologues qu'il faut comparer dans les Proportions qu'on a à faire.

On a fait voir ensuite que les Triangles avoient les côtés homologues proportionnels, quand ils avoient les Angles égaux ; & réciproquement, qu'ils avoient les Angles égaux, lorsqu'ils avoient les côtés proportionnels : en sorte que pour démontrer que deux Triangles sont semblables, on s'est souvent contenté de faire voir qu'ils avoient les Angles égaux, ou qu'ils avoient les côtés proportionnels.

Il n'en est pas de même des Polygones qui ont plus de trois côtés. Ils peuvent avoir ses Angles égaux, sans avoir les côtés proportionnels ; & réciproquement, ils peuvent avoir les côtés proportionnels, sans avoir les Angles égaux. Ainsi pour que deux Polygones qui ont plus de trois côtés, soient réputés semblables, il ne suffit pas qu'on leur trouve les Angles égaux, ou les côtés proportionnels ; mais il faut que, suivant la définition, ils ayent en même tems les Angles égaux & les côtés proportionnels.

Par exemple, 1°. Un Quarré & un Parallélogramme rectangle sont deux Polygones dont les

Angles sont droits, & par conséquent égaux. Mais le Quarré ayant tous les quatre côtés égaux, & le Parallélogramme rectangle n'ayant pas les côtés égaux, ces deux Polygones ne peuvent point avoir les côtés proportionnels, & ne sont pas par conséquent des Figures semblables.

2°. Un Quarré & un Lozange sont deux Polygones qui ont chacun les quatre côtés égaux; ainsi ces deux Figures ont les côtés proportionnels. Mais les quatre Angles du Quarré étant droits, & les quatre Angles du Lozange ne l'étant pas, ces deux Figures n'ont pas les Angles égaux, & ne sont par conséquent pas semblables.

Il en sera de même de toutes les autres Figures de plus de trois côtés.

DÉFINITIONS.

267 1°. Un Polygone est inscrit dans un Cercle, quand il a tous les Angles à la Circonférence de ce Cercle; c'est-à-dire, lorsque tous ses côtés sont des Cordes de ce Cercle.

2°. Un Polygone est circonscrit à un Cercle, quand tous ses côtés sont des Tangentes de ce Cercle.

THÉORÊME.

268 *Si des Angles correspondans* A *&* M *de deux Polygones semblables* ABCDEF, MNOPQR, *on tire des Droites aux autres Angles, les Triangles* ABC, ACD, ADE, *&c. du premier Polygone, seront semblables à ceux* MNO, MOP, MPQ, *&c du second Polygone.* Fig. 204 & 205.

DÉMONSTRATION.

Puisque les deux Polygones sont semblables, on aura

1°. L'Angle $B=N$ & $AB:MN::BC:NO$: Ainſi les deux Triangles ABC, MNO, ſeront ſemblables (*N°*. 259.).

2°. Puiſque les Triangles ABC, MNO, ſont ſemblables, on aura l'Angle $ACB=MON$. Mais (*hyp.*) l'Angle $BCD=NOP$. Ainſi retranchant les deux premiers Angles égaux de ces deux-ci, l'on aura l'Angle $ACD=MOP$.

On aura de plus $AC:MO::BC:NO$.

Mais puiſque les Polygones ſont ſemblables, on aura $BC:NO::CD:OP$.

Donc $AC:MO::CD:OP$. Ainſi les deux Triangles ACD, MOP, auront les côtés proportionnels autour des Angles égaux ACD, MOP, & ſeront par conſéquent ſemblables (*N°*. 259.).

3°. On démontrera de la même maniere que les deux Triangles ADE, MPQ, ſont ſemblables : & ainſi des autres.

Donc ſi l'on diviſe deux Polygones ſemblables en Triangles, par des Lignes tirées de deux Angles correſpondans à tous les autres, les Triangles du premier Polygone ſeront ſemblables aux Triangles du ſecond Polygone. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÊME.

Fig. 204 & 205. 269 *Si deux Polygones* ABCDEF, MNOPQR, *d'un même nombre de côtés, ſont partagés en Triangles ſemblables chacun à chacun & ſemblablement diſpoſés, par des Lignes tirées des Angles* A *&* M *à tous les autres Angles ; ces deux Polygones ſeront ſemblables.*

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que les Polygones $ABCDEF$, $MNOPQR$, ſont ſemblables, il faut faire voir

qu'ils ont les Angles égaux chacun à chacun, & les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux.

1°. Les Triangles *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF*, dans lesquels le premier Polygone *ABCDEF* est partagé, & ceux *MNO*, *MOP*, *MPQ*, *MQR*, dans lesquels le second Polygone *MNOPQR* est divisé, étant supposés semblables chacun à chacun & semblablement disposés; les Angles de ces deux Polygones sont composés d'un même nombre d'Angles égaux chacun à chacun, & sont par conséquent égaux.

2°. Les deux mêmes Polygones *ABCDEF*, *MNOPQR*, ont les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux.

Car à cause des deux Triangles semblables *ABC*, *MNO*, on a *AB* : *MN* :: *BC* : *NO*, c'est-à-dire, les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux *B* & *N* des deux Polygones.

Les deux mêmes Triangles semblables *ABC*, *MNO*, donnent aussi *BC* : *NO* :: *AC* : *MO*. Mais les Triangles semblables correspondans *ACD*, *MOP* donnent *AC* : *MO* :: *CD* : *OP*.

Donc *BC* : *NO* :: *CD* : *OP*; c'est-à-dire, que les côtés sont directement proportionnels autour des Angles correspondans *C* & *O*.

Comme il est aisé de voir qu'on démontrera de la même façon que les autres Angles égaux des deux Polygones sont compris entre côtés proportionnels, nous pouvons conclurre que les deux Polygones ont tous les côtés proportionnels autour de leurs Angles correspondans que nous avons démontré être égaux; & que ces Polygones sont par conséquent semblables (N°. 243.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 206. 270 Si d'un Angle quelconque *A*, d'un Polygone *ABCDEF*, on tire des Lignes indéfinies *ACc*, *ADd*, *AEe*, &c, par tous les autres Angles, & que d'un Point *b*, pris dans le côté *AB* ou dans son prolongement, on mene *bc* paralléle à *BC*; qu'ensuite par le Point *c*, où cette Paralléle rencontre *ACc*, on tire *cd* paralléle à *CD*; que par le Point *d*, où cette nouvelle Paralléle rencontre *ADd*, on tire *de* paralléle à *DE*; & qu'on mene ainsi des Paralléles à tous les côtés du Polygone, en sorte qu'on fasse un nouveau Polygone *Abcdef*, dont les Sommets des Angles *c*, *d*, *e*, soient dans les Diagonales indéfinies *ACc*, *ADd*, *AEe*, &c; ce nouveau Polygone *Abcdef* sera semblable au premier Polygone *ABCDEF*; puisque ces deux Polygones seront composés de Triangles semblables, & semblablement disposés.

On voit par ce Corollaire comment on peut faire un Polygone semblable à un Polygone donné.

COROLLAIRE II.

Fig. 204. & 205. 271 Donc si l'on tire deux Diagonales *AD*, *MP*, par les Angles correspondans de deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, les deux parties *ABCD*, *ADEF*, du premier Polygone, seront semblables chacune à chacune aux deux parties *MNOP*, *MPQR*, du second Polygone. Car si dans les deux parties correspondantes *ABCD*, *MNOP*, l'on tire les Diagonales *AC*, *MO*, les Triangles *ABC*, *ACD*, qui composeront la partie *ABCD*, seront semblables aux Triangles *MNO*, *MOP*, qui composeront la partie correspondante

MNOP (*N*°. 268.) : de plus, ces Triangles ſemblables ſeront diſpoſés de la même façon. Ainſi les deux parties *ABCD*, *MNOP*, ſeront ſemblables (*N*°. 269.).

On démontrera de même que les deux autres parties correſpondantes *ADEF*, *MPQR*, ſont compoſées de Triangles ſemblables & ſemblablement diſpoſés ; & que ces deux parties ſeront par conſéquent ſemblables (*N*°. 269.).

COROLLAIRE III.

272 Donc les Diagonales *AC*, *MO*, qui paſſeront par les Angles correſpondans de deux Parallélogrammes ſemblables *ABCD*, *MNOP*, les partageront en Triangles ſemblables chacun à chacun. Ainſi lorſqu'on aura deux Triangles ſemblables *ABC*, *MNO*, on pourra les regarder comme les moitiés de deux Parallélogrammes ſemblables *ABCD*, *MNOP*. Fig. 207 & 208.

CHAPITRE III.

Des Points ſemblablement placés.

DÉFINITIONS.

1°. 273 DEUX Points *G*, *S*, ſont ſemblablement placés par rapport à deux Droites *AB*, *MN*, ou par rapport aux Points *A*, *B*, & *M*, *N*, qui terminent ces Lignes, lorſque les diſtances *GA*, *GB*, de l'un *G* de ces Points, aux extrémités de la Droite *AB*, ſont aux diſtances *SM*, *SN*, de l'autre Point *S*, aux extrémités de la Droite *MN*, dans le rapport de *AB* à *MN* ; c'eſt-à-dire, lorſque Fig. 209 & 210, ou 211 & 212.

$$GA : GB : AB :: SM : SN : MN,$$

Fig. 209 & 210. *Si les Points* G, S, *sont situés dans les Droites* AB, MN; *pour démontrer qu'ils sont semblablement placés par rapport à ces Lignes, il suffira de faire voir que* GA : GB :: SM : SN, *ou que* GA : SM :: GB : SN. *Car alors on aura* GB : SN :: GA+GB : SM+SN (N°. 214.); *c'est-à-dire*, GB : SN :: AB : MN. *Ainsi en mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & les Conséquens dans une autre Suite, on aura* GA : GB : AB :: SM : SN : MN.

Dans le même cas où les Points G, S, *seront situés dans les Droites* AB, MN; *lorsqu'on voudra démontrer que ces Points sont semblablement placés par rapport à ces deux Droites, il suffira encore de prouver que* AB:GA::MN:SM, *ou que* AB : MN :: GA : SM; *c'est-à-dire, que la distance du Point* G *à l'un des bouts de la Droite* AB *est à la distance du Point* S *à l'un des bouts de la Droite* MN, *comme la Droite* AB *est à la Droite* MN. *Car alors on aura* AB : MN :: AB—GA : MN—SM (N°. 224.); *c'est-à-dire*, AB : MN :: GB : SN. *Ainsi en mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & leurs Conséquens dans une autre Suite, on aura* AB : GA : GB :: MN : SM : SN.

Fig. 211 & 212. *Dans le cas où les Points* G, S, *seront au dehors des Droites* AB, MN; *pour prouver que ces Points sont semblablement placés par rapport à ces Lignes, il suffira de prouver que les Triangles* AGB, MSN, *sont semblables; puisqu'alors on aura* GA : GB : AB::SM:SN:MN.

Fig. 215 & 216. 2°. Lorsque deux Droites *FG*, *RS*, seront terminées par des Points semblablement placés par rapport à deux Droites *AB*, *MN*, on les nommera *Lignes homologues* par rapport aux deux Droites *AB*, *MN*.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. 3°. On dit que deux Points *G*, *S*, sont semblablement placés par rapport à deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, lorsqu'ils sont

semblablement placés par rapport à tous les côtés correspondans de ces Polygones.

COROLLAIRE I.

274 Donc les extrémités *B*, *N*, de deux Droites *AB*, *MN*, sont semblablement placées par rapport à ces deux Droites. Car ces deux Points *B*, *N*, sont dans les Droites *AB*, *MN*; & leurs distances *BA*, *NM*, aux extrémités *A*, *M*, des deux Droites *AB*, *MN*, sont proportionnelles à ces deux Droites. Fig. 209 & 210.

COROLLAIRE II.

275 Deux Points *G*, *S*, étant semblablement placés par rapport à deux Droites *AB*, *MN*; si de ces Points on mene à ces deux Lignes des Droites *GH*, *ST*, de maniere que les deux Angles *GHB*, *STN*, soient égaux & disposés de la même façon, les deux Points *H*, *T*, dans lesquels les deux Droites *AB*, *MN*, seront rencontrées, seront semblablement placés par rapport à ces deux Droites. Fig. 211 & 212, ou 213 & 214.

Car si des Points *G*, *S*, on mene les Droites *GA*, *GB*, & *SM*, *SN*, aux extrémités des deux Droites *AB*, *MN*, les Triangles *AGB*, *MSN*, seront semblables (*N*°. 273.); & l'on aura par conséquent l'Angle *ABG*=*MNS*: & comme l'Angle *GHB*=*STN* (*hyp.*), les deux Triangles *BGH*, *NST*, auront deux Angles égaux chacun à chacun, & seront par conséquent semblables (*N*°. 254.).

Mais les Triangles *AGB*, *MSN*, étant semblables, on aura *AB*:*MN*::*GB*:*SN*;

Et les deux Triangles *BGH*, *NST*, étant aussi semblables, on aura *GB*:*SN*::*HB*:*TN*.

On aura donc *AB* : *MN* : : *HB* : *TN*; & par conséquent (*N*°. 273.) les Points *H*, *T*, seront semblablement placés dans les deux Droites *HB*, *MN*.

COROLLAIRE III.

Fig. 213 & 214. 276 Il suit évidemment du Corollaire précédent, que deux Points *G*, *S*, étant semblablement placés par rapport à deux Droites *AB*, *MN*, si de ces deux Points on mene des Perpendiculaires *GH*, *ST*, à ces deux Droites, les deux Points *H*, *T*, où les Droites *AB*, *MN*, seront rencontrées, seront semblablement placés par rapport à ces deux Droites; car les Angles *GHB*, *STN*, seront égaux.

COROLLAIRE IV.

Fig. 204 & 205. 277 Puisqu'il est démontré (*N°*. 268.) que si des Sommets de deux Angles correspondans quelconques *A* & *M* de deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, on tire des Droites à tous les autres Angles, les Triangles *BAC*, *CAD*, *DAE*, *EAF*, dans lesquels le premier Polygone sera divisé, seront semblables aux Triangles correspondans *NMO*, *OMP*, *PMQ*, *QMR*, dans lesquels le second Polygone sera partagé; il faut en conclurre (*N°*. 273.) que les Sommets *A* & *M* de deux Angles correspondans quelconques de deux Polygones semblables, *ABCDEF*, *MNOPQR*, sont semblablement placés par rapport à tous les côtés homologues de ces Polygones, sans en excepter les côtés *AB*, *AF*, & leurs homologues *MN*, *MR*, à l'égard desquels il est prouvé (*N°*. 274.) que les Points *A*, *M*, sont semblablement placés.

Et comme deux Points sont semblablement placés à l'égard de deux Polygones semblables, lorsqu'ils sont semblablement placés par rapport à tous les côtés correspondans de ces Polygones (*N°*. 273.); il est clair que les Sommets *A*, *M*, de deux Angles correspondans quelconques de deux Polygones semblables

blables *ABCDEF*, *MNOPQR*, sont semblablement placés par rapport à ces Polygones.

THÉORÉME.

278 *Soient deux Points* F, R, *semblablement placés par rapport à deux Droites* AB, MN; *& soient deux autres Points* G, S, *aussi semblablement placés à l'égard des deux mêmes Droites : les Droites homologues* FG, RS, *qui seront terminées par ces Points semblablement placés, seront dans le même rapport que les deux premieres Droites* AB, MN; *c'est-à-dire, qu'on aura* Fig. 215 & 216.

FG : RS : : AB : MN.

DÉMONSTRATION.

Les Points *F*, *R*, étant semblablement placés à l'égard des deux Droites *AB*, *MN*, les Triangles *AFB*, *MRN*, seront semblables (*N*°. 273.); & par conséquent les Angles *FAB*, *RMN*, seront égaux.

Les Points *G*, *S*, étant aussi semblablement placés à l'égard des mêmes Droites *AB*, *MN*, les Triangles *AGB*, *MSN*, seront semblables ; & par conséquent les Angles *GAB*, *SMN*, seront égaux.

Retranchant les deux Angles égaux *FAB*, *RMN*, des deux Angles égaux *GAB*, *SMN*, les Angles restans *FAG*, *RMS*, seront égaux.

Les Triangles semblables *AFB*, *MRN*, donneront *AF* : *MR* : : *AB* : *MN*.

Les Triangles semblables *AGB*, *MSN*, donneront *AB* : *MN* : : *AG* : *MS*.

On aura donc *AF* : *MR* : : *AG* : *MS*. Ainsi les deux Angles égaux *FAG*, *RMS*, seront compris entre côtés proportionnels ; & par conséquent les

deux Triangles FAG, RMS, seront semblables (*N*°. 259.), & donneront

$$FG : RS :: AF : MR.$$

Mais on a déjà trouvé $AF : MR :: AB : MN.$

Donc on aura enfin $FG : RS :: AB : MN.$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 215 & 216. **279** Donc si deux Droites FG, RS, sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard de deux autres Droites AB, MN, les extrémités des deux Lignes AB, MN, seront aussi des Points semblablement placés par rapport aux deux Droites FG, RS.

Car puisqu'il est démontré (*N*°. 278.) que les Triangles FAG, RMS, sont semblables, les Points A & M seront semblablement placés à l'égard des deux Droites FG, RS (*N*°. 273.).

On démontrera de la même maniere que les deux Points B, N, sont semblablement placés à l'égard des deux Droites FG, RS, en faisant voir que les Triangles BFG, NRS, sont semblables.

COROLLAIRE II.

Fig. 217 & 218. **280** Donc si trois Points F, G, H, sont placés à l'égard d'une Droite AB, comme trois autres Points R, S, T, le sont à l'égard d'une autre Droite MN, le Triangle FGH, qui aura ses Angles aux trois premiers Points, sera semblable au Triangle RST, qui aura ses Angles aux trois derniers.

Car on aura (*N*°. 278.) $\begin{cases} FG : RS :: AB : MN \\ GH : ST :: AB : MN \\ FH : RT :: AB : MN. \end{cases}$

C'est-à-dire, que les trois côtés du Triangle FGH

feront à ceux du Triangle *RST* dans le rapport de *AB* à *MN*. Ainsi ces deux Triangles auront tous les côtés proportionnels, & feront par conséquent semblables (*N*°. 261.).

COROLLAIRE III.

281 Puisque les Triangles *FGH*, *RST*, sont semblables, il faut en conclurre (*N*°. 273.) que si trois Points *F*, *G*, *H*, & trois autres Points *R*, *S*, *T*, sont semblablement placés à l'égard de deux Droites *AB*, *MN*, les trois premiers Points *F*, *G*, *H*, & les trois derniers *R*, *S*, *T*, sont semblablement placés entr'eux; c'est-à-dire, que l'un quelconque *H* des trois premiers Points est situé à l'égard des deux autres *F*, *G*, ou par rapport à la Droite *FG* qui les joint, comme le Point correspondant *T*, pris parmi les trois derniers Points, est placé à l'égard des deux autres *R*, *S*, ou par rapport à la Droite *RS* qui les joint. Fig. 217 & 218.

THÉORÈME.

282 *Lorsque deux Points* H, T, *sont semblablement placés à l'égard de deux Droites* FG, RS, *qui sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard de deux autres Droites* AB, MN; *ces Points* H, T, *sont aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites* AB, MN. Fig. 217 & 218.

DÉMONSTRATION.

Car les extrémités des deux Droites *FG*, *RS*, étant semblablement placées à l'égard des deux Droites *AB*, *MN* (*hyp.*), les extrémités des deux Droites *AB*, *MN*, seront réciproquement semblablement placées à l'égard des deux Droites *FG*, *RS* (*N*°. 279.):

O ij

& comme (*hyp.*) les deux Points *H*, *T*, sont aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites *FG*, *RS*, les trois Points *A*, *B*, *H*, & leurs correspondans *M*, *N*, *T*, seront semblablement placés à l'égard des deux Droites *FG*, *RS*. Ainsi les Triangles *AHB*, *MTN*, seront semblables (*N*°. 280.); & par conséquent les deux Points *H*, *T*, seront semblablement placés à l'égard des deux Droites *AB*, *MN*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. 283 Les côtés correspondans *AB*, *MN*, de deux Polygones semblables *ABCDE*, *MNOPQ*, sont (*N*°. 277.) semblablement placés par rapport à tous les côtés homologues de ces Polygones, & par conséquent à l'égard de ces Polygones eux-mêmes.

Donc si deux Points *G*, *S*, sont semblablement placés à l'égard de deux côtés homologues *AB*, *MN*, ils seront aussi semblablement placés à l'égard de tous les autres côtés homologues des deux Polygones *ABCDE*, *MNOPQ* (*N*°. 282.); & par conséquent (*N*°. 273.) ils seront semblablement placés à l'égard de ces deux Polygones.

Corollaire II.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. 284 Si deux Lignes *FG*, *RS*, sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard des Polygones semblables *ABCDE*, *MNOPQ*, ou à l'égard de deux côtés homologues *AB*, *MN*, de ces Polygones; les Points *H*, *T*, qui seront semblablement placés par rapport aux deux Droites *FG*, *RS*, seront aussi semblablement placés à l'égard des côtés homologues *AB*, *MN* (*N*°. 282.), & par conséquent (*N*°. 283.) seront semblablement placés à l'égard des deux Polygones.

Il suit de là que les Points *G*, *S*, qui seront semblablement placés à l'égard de deux Diagonales homologues *CE*, *OQ*, de deux Polygones semblables *ABCDE*, *MNOPQ*, seront semblablement placés par rapport à ces Polygones.

THÉORÊME.

285 *Soient deux Polygones semblables* ABCDEF, MNOPQR. *Si l'on fait passer une Circonférence par les sommets* A, C, E, *de trois Angles quelconques du premier Polygone, & une autre Circonférence par les sommets* M, O, Q, *de trois Angles correspondans du second, les Centres* G, S, *de ces deux Circonférences, seront des Points semblablement placés à l'egard des deux Polygones.* Fig. 223 & 224.

DÉMONSTRATION.

Puisque (*N*°. 277.) les sommets des Angles correspondans de deux Polygones semblables sont semblablement placés à l'égard de tous les côtés homologues de ces Polygones, les trois Points *A*, *C*, *E*, & leurs correspondans *M*, *O*, *Q*, seront semblablement placés à l'égard des côtés homologues *AB*, *MN*, des deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*; & par conséquent (*N*°. 280.) les deux Triangles *ACE*, *MOQ*, qui auront leurs Angles à ces Points semblablement placés, seront semblables. Ainsi les Angles *CAE*, *OMQ*, qui auront le sommet à la Circonférence, seront égaux; & les Arcs *CE*, *OQ*, compris entre leurs côtés, seront aussi égaux (*N*°. 90.), ou plustôt contiendront un même nombre de degrés. Donc si des Centres G, S, des deux Cercles, on tire des Rayons aux extrémités des deux Arcs *CE*, *OQ*, les deux Angles *CGE*, *OSQ*, seront

égaux; & par conséquent les deux Triangles isoscelés *CGE*, *OSQ*, seront semblables (*N°.* 255.). Ainsi (*N°.* 273.) les Centres *G*, *S*, seront semblablement placés à l'égard des deux Diagonales homologues *CE*, *OQ*, & seront par conséquent semblablement placés à l'égard des deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR* (*N°.* 284.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 225 & 226. **286** Donc si les Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, sont inscrits dans des Cercles, les Centres *G*, *S*, de ces Cercles, seront des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones.

LEMME.

Fig. 227. **287** *Lorsqu'un Angle* BAD *est formé par deux Lignes droites qui touchent un même Cercle, la Droite* AC, *tirée par le sommet de l'Angle & par le Centre du Cercle, divise cet Angle en deux parties égales.*

DÉMONSTRATION.

Soient tirés les Rayons *CB*, *CD*, du Centre aux deux Points d'attouchement; ces Rayons seront perpendiculaires sur les Tangentes *AB*, *AD* (*N°.* 64.). Ainsi (*N°.* 43.) l'Oblique *CA* s'éloignera également de ces deux Perpendiculaires égales; ce qui donnera *AB*=*AD*. Donc les deux Triangles *ABC*, *ADC*, auront tous les côtés égaux chacun à chacun, & par conséquent (*N°.* 118.) seront parfaitement égaux. D'où il suit enfin qu'on aura *l'Angle BAC* = *l'Angle DAC*; c'est-à-dire, que l'Angle *BAD* sera divisé en deux parties égales par la Droite *AC*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÉME.

288 *Soient deux Polygones semblables* ABCDEFGHI, abcdefghi. *Si l'on décrit un Cercle qui soit touché par trois côtés quelconques* AB, DE, FG, *du premier Polygone, & qu'on fasse un autre Cercle qui soit touché par les trois côtés correspondans* ab, de, fg, *du second Polygone; les Centres* K, k, *de ces deux Cercles, seront des Points semblablement placés dans ces deux Polygones.* Fig. 228 & 229.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés dans le premier Polygone les côtés tangens *AB*, *DE*, *FG*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en *L*, *M*; puis soient menées les Diagonales *AG*, *BD*, & soient tirées du Centre K les Droites *KL*, *KM*, qui (*N*°. 287.) diviseront en deux parties égales les Angles *MLF*, *LME*. Soient aussi prolongés dans le second Polygone les côtés correspondans tangens *ab*, *de*, *fg*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en *l*, *m*; puis soient tirées les Diagonales correspondantes *ag*, *bd*, & du Centre *k* soient menées les Droites *kl*, *km*, qui (*N*°. 287.) diviseront en deux parties égales les deux Angles *mlf*, *lme*.

Puisque (*hyp.*) les deux Diagonales *AG*, *ag*, passent par les Angles correspondans des deux Polygones semblables, les parties correspondantes *ABCDEFG*, *abcdefg*, seront des Polygones semblables (*N*°. 271.); & les Angles *BAG*, *FGA*, seront égaux aux Angles *bag*, *fga*. Ainsi les supplémens *LAG*, *LGA*, des deux premiers Angles *BAG*, *FGA*, seront égaux aux supplémens *lag*, *lga*, des deux seconds *bag*, *fga*: & par conséquent (*N*°. 254.) les deux Triangles *ALG*, *alg*, seront semblables; & les Points *L*, *l*, seront sembla-

blement placés à l'égard des deux Diagonales homologues *A G*, *a g* (*N*o. 273.), & par rapport aux deux Polygones semblables *A B C D E F G H I*, *a b c d e f g h i* (*N*o. 284.).

On démontrera de la même maniere que les Triangles *B M D*, *b m d*, seront semblables & que les Points *M*, *m*, seront aussi semblablement placés dans les deux Polygones semblables.

Les Triangles *A L G*, *B M D*, étant semblables aux Triangles correspondans *a l g*, *b m d*, les Angles *L*, *M*, formés par des Tangentes, seront égaux aux Angles *l*, *m*, aussi formés par des Tangentes; & les moitiés *MLK*, *LMK*, des deux premiers, seront égales aux moitiés *m l k*, *l m k*, des deux autres correspondans. Ainsi le Triangle *L K M* sera semblable au Triangle *l k m*; & par conséquent (*N*o. 273.) les Centres *K*, *k*, seront semblablement placés par rapport aux deux Droites *L M*, *l m*: & comme ces deux Droites se terminent à des Points semblablement placés par rapport aux deux Polygones *A B C D E F G H I*, *a b c d e f g h i*, les deux Centres *K*, *k*, seront (*N*o. 284.) semblablement placés par rapport à ces Polygones semblables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

Fig. 230 & 231. 289 Donc si deux Polygones semblables *ABCDEF*, *a b c d e f*, sont circonscrits à des Cercles, les Centres *K*, *k*, de ces Cercles, seront des Points semblablement placés dans ces deux Polygones.

Et attendu que deux Cercles peuvent être regardés comme deux Polygones semblables d'une infinité de côtés, circonscrits à de véritables Cercles, il est clair que les Centres de deux Cercles sont des Points semblablement placés dans ces Cercles.

SCHOLIE.

C'eſt ſur la Théorie des Points ſemblablement placés renfermée dans ce Chapitre, que ſont fondés les différens moyens qu'on met en uſage pour faire des Cartes Topographiques. Ainſi c'eſt ici le lieu d'expliquer les opérations que les Géographes & les Arpenteurs font, tant pour connoître comment différens Lieux ſont ſitués les uns à l'égard des autres, que pour repréſenter leurs poſitions ſur une Carte ou dans un eſpace donné. Comme le détail des opérations que demandent les différentes Méthodes de lever les Plans, relativement aux difficultés que l'on peut rencontrer, & aux différens inſtrumens qu'on peut employer, pourroit faire le ſujet d'un Traité particulier trop étendu pour être inſéré dans celui-ci, nous nous contenterons d'expoſer en gros & généralement les opérations qui ſont les plus ordinaires.

I.

290 Soient les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, &c. Fig. 131. conſidérés comme différens Clochers ou Points remarquables, dont il faut déterminer les ſituations, & les repréſenter ſur une Carte.

On fera meſurer exactement, dans une partie unie & découverte de la campagne, & ſuivant quelle direction l'on voudra, une Ligne droite *MN*, des extrémités de laquelle on puiſſe apercevoir pluſieurs des Points dont on veut avoir la ſituation.

Enſuite après avoir choiſi un inſtrument propre à meſurer ou à prendre l'ouverture des Angles, on prendra à chacune des extrémités de la Droite *MN* l'ouverture des Angles que cette Ligne formera avec les Lignes dirigées vers les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

qu'on pourra apercevoir des deux Points *M*, *N*: c'eſt-à-dire, que dans une premiere ſtation qu'on fera en *M*, on prendra l'ouverture des Angles *NMA*, *NMB*, *NMC*, *NMD*, *NME*; & dans une ſeconde ſtation qu'on fera en *N*, on prendra l'ouverture des Angles *MNA*, *MNB*, *MNC*, *MND*, *MNE*.

Les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ainſi obſervés des deux extrémités de la Droite *MN*, feront les ſommets d'autant de Triangles *MAN*, *MBN*, *MCN*, *MDN*, *MEN*, qui auront tous pour baſe la même Ligne meſurée *MN*, & dans chacun deſquels on aura pris l'ouverture des deux Angles à cette baſe. Ainſi l'on connoîtra aſſez de choſes dans ces Triangles, pour en faire d'autres qui leurs ſoient ſemblables, & qui ſoient établis ſur une même baſe relative à *MN*.

Fig. 232 & 233. Pour repréſenter ſur la Carte la poſition des premiers Clochers ou Points remarquables qu'on a vûs & obſervés des deux extrémités de la Droite *MN*, on tracera d'abord ſur le papier une Droite *mn* qui contiendra autant de parties égales de grandeur quelconque, qu'on aura trouvé de meſures dans la Droite *MN*. Par exemple, ſi l'on a trouvé dans *MN* 100 meſures chacune de 10 *Toiſes*, & qu'on veuille que 10 *Toiſes* du terrein ſoient repréſentées ſur la Carte par une *Ligne*, on fera la Droite *mn* de 100 *Lignes*.

Enſuite on tirera par le Point *m* des Droites *ma*, *mb*, *mc*, *md*, *me*, qui faſſent avec *mn* des Angles *nma*, *nmb*, *nmc*, *nmd*, *nme*, égaux à ceux *NMA*, *NMB*, *NMC*, *NMD*, *NME*, dont on a pris l'ouverture au Point *M*; & l'on ménera par le Point *n* des Droites *na*, *nb*, *nc*, *nd*, *ne*, qui faſſent avec *nm* des Angles *mna*, *mnb*, *mnc*, *mnd*, *mne*,

égaux à ceux *MNA*, *MNB*, *MNC*, *MND*, *MNE*, qu'on a obſervés au Point *N*. Par ce moyen l'on conſtruira ſur *mn* des Triangles *man*, *mbn*, *mcn*, *mdn*, *men*, qui (*N*°. 254.) ſeront ſemblables chacun à chacun aux Triangles *MAN*, *MBN*, *MCN*, *MDN*, *MEN*, qui ſont ſur la Droite *MN*; & les ſommets *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, des premiers, repréſenteront ſur la Carte les ſommets *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, des derniers, c'eſt-à-dire, la ſituation des Clochers ou Points remarquables qu'on a vûs des deux extrémités de la Droite *MN*.

Si l'on veut avoir les poſitions d'un plus grand nombre de Points, pour les marquer ſur la Carte, on imaginera une Droite *AB* tirée par deux Points *A* & *B* déjà déterminés; & l'on prendra à chaque extrémité de cette Ligne l'ouverture des Angles qu'elle formera avec les rayons viſuels dirigés de ces extrémités vers de nouveaux Clochers ou Points remarquables *F* & *G*. Les Points *F*, *G*, ainſi obſervés, ſeront les ſommets d'autant de nouveaux Triangles *AFB*, *AGB*, établis ſur une même baſe *AB*, & dans chacun deſquels on connoîtra deux Angles; en ſorte que dans la Carte on en pourra conſtruire de ſemblables *afb*, *agb*, ſur une Ligne *ab* terminée par les deux Points *a* & *b* qui repréſentent les Points *A* & *B*. Les nouveaux Triangles *afb*, *agb*, étant conſtruits, leurs ſommets *f*, *g*, repréſenteront les deux Points *F*, *G*.

On repréſentera de même ſur la Carte, par de nouveaux Points *h*, *i*, la ſituation de tous les Points remarquables *H*, *I*, qu'on pourra voir des deux Points *B*, *D*; & l'on y marquera de la même maniere tant d'autres Points qu'on voudra, qui repréſenteront les poſitions d'autant d'autres Points du terrein vûs de deux Points déjà déterminés.

Pour démontrer que les Points *a.b.c.d.e.f.g.h.i.m.n.* ainsi placés sur la Carte, représentent exactement la position des Points remarquables *A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N,* du Pays, & l'arrangement que ces Points ont entr'eux, il faut faire voir que toutes les distances qui sont entre les Points *A, B, C,D,E,F,G,H,I,M,N,* sont proportionnelles aux distances qui sont entre les Points correspondans *a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n.*

Les premiers Points *A, B, C, D, E*, qu'on a observés des deux extrémités de la base *MN*, & leurs correspondans *a, b, c, d, e,* qu'on a marqués sur la Carte, étant les sommets de Triangles semblables chacun à chacun, & semblablement disposés à l'égard de leurs bases *MN, mn*, sont semblablement placés par rapport à ces deux bases *MN, mn* (*N*°.273.).

Les Points *F, G,* & leurs correspondans *f, g*, étant aussi les sommets de Triangles semblables chacun à chacun, & semblablement disposés sur leurs bases *AB, ab*, sont semblablement placés par rapport à ces deux bases (*N*°. 273.) : & comme ces deux bases *AB, ab*, sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard des deux Droites *MN, mn*, les Points *F, G*, & leurs correspondans *f, g*, seront aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites *MN, mn* (*N*°. 282.).

On prouvera de même, que les Points *H, I*, & leurs correspondans *h, i*, sont semblablement placés à l'égard des deux Droites *MN, mn* ; & ainsi des autres.

Les Points *A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N,* & leurs correspondans *a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n*, étant semblablement placés par rapport aux deux Droites *MN, mn*, (car (*N*°. 274.) il faut comprendre les extrémités des Droites *MN, mn*, parmi les Points semblablement placés par rapport à ces deux Lignes),

toutes les Droites par lesquelles on joindra deux à deux les premiers, seront aux Droites par lesquelles on joindra deux à deux les derniers, dans le rapport de *MN* à *mn* (*N*°. 278.); c'est-à-dire, que les distances comprises entre les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *M*, *N*, du terrein, seront proportionnelles aux distances comprises entre les Points correspondans *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *m*, *n*, marqués sur la Carte: d'où il suit que les Points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *m*, *n*, seront arrangés sur la Carte de la même maniere que les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *M*, *N*, le sont sur le terrein.

Comme le nombre des petites mesures contenues dans la Droite *m n*, & que nous avons supposées être des *Lignes*, représente le nombre des mesures de 10 *Toises* contenues dans *M N*, il est clair que les différens nombres de petites mesures ou *Lignes* qu'on trouvera entre les Points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, de la Carte, représenteront les différens nombres de mesures de 10 *Toises* comprises entre les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, du terrein. Ainsi *m n*, ou toute autre Ligne qui sera divisée en parties égales aux petites mesures dont la Ligne *m n* est composée, sera une Échelle propre à mesurer les distances comprises entre les différens Points de la Carte, & à faire connoître les véritables distances comprises entre les différens Points du terrein.

Quoique la méthode dont on vient de donner une idée puisse aussi être mise en usage pour déterminer le cours des rivieres, les sinuosités des chemins, les contours de tous les terreins particuliers, & pour les représenter sur une Carte, on évite cependant de s'en servir lorsqu'il s'agit de tous ces détails; parce que pour les bien faire & les représenter exactement, il faut nécessairement parcourir & mesurer toutes les parties du terrein dont on veut déterminer

la figure. On va donner un exemple de ces opérations de détail, dans le Paragraphe suivant.

II.

Fig. 234. 291 Supposons qu'on ait à détailler le cours d'une Riviere, ou les sinuosités d'un Chemin *ABCDE*, entre deux Points *A* & *E* déterminés & marqués sur la Carte suivant la Méthode qu'on vient d'expliquer.

On prendra une Boussole garnie de Pinules, dont on sait que l'Aiguille aimantée se dirigera toûjours suivant une Ligne *Nord & Sud*, ou suivant une Ligne de déclinaison, qui dans le peu d'étendue du cours *A B C D E* s'éloignera également de la Ligne *Nord & Sud*; en sorte que toutes les directions *AN*, *BN*, *CN*, *DN*, que prendra l'Aiguille aimantée aux différens Points *A*, *B*, *C*, *D*, de la Riviere ou du Chemin, pourront être regardées comme paralléles.

Ensuite après avoir fait planter des Piquets aux extrémités *A*, *E*, & à tous les coudes *B*, *C*, *D*, de la Riviere ou du Chemin, on prendra à chacun des Piquets les Angles *NAB*, *NBC*, *NCD*, *NDE*, que fera la direction de l'Aiguille aimantée avec le rayon visuel, par lequel on apercevra au travers des Pinules le Piquet voisin de celui où l'on sera; & l'on mesurera toutes les distances *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, qui seront entre les Piquets.

Avant de rapporter sur la Carte les ouvertures des Angles & les distances mesurées sur le terrein, on tracera sur un papier à part une Droite *an*, pour représenter la direction *AN* que l'Aiguille aimantée avoit au Point *A* du terrein; & l'on y marquera un Point *a*, pour représenter le premier Point *A* de la Riviere ou du Chemin. Puis ayant fait un Angle *nab* égal à celui *NAB* que l'Aiguille aimantée faisoit en *A* avec la direction des Pinules par lesquelles on voyoit

le Piquet suivant *B*, on fera le côté *ab* de cet Angle égal à autant de parties de l'Échelle de la Carte, qu'on aura trouvé dans *AB* de mesures correspondantes aux parties de l'Échelle; c'est-à-dire, que si les parties de l'Échelle de la Carte représentent des mesures de 10 *Toises*, & qu'on ait trouvé dans *AB* 6 mesures de 10 *Toises*, on fera le côté *ab* égal à 6 parties de l'Échelle. Fig. 234 & 235.

Ensuite ayant mené par le Point *b* une Droite *bn* paralléle à *an*, pour représenter la direction *BN* que l'Aiguille aimantée avoit en *B*, & ayant fait l'Angle *nbc* égal à l'Angle *NBC* que l'Aiguille aimantée faisoit en *B* avec le rayon visuel *BC*, on fera le côté *bc* égal à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans *BC*.

Après avoir aussi mené par le Point *c* une Droite *cn* parallele à *an*, & fait l'Angle *ncd* égal à l'Angle *NCD* observé en *C*, on fera *cd* égal à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans *CD*.

Enfin par le Point *d* ayant mené *dn* parallele à *an*, & ayant fait l'Angle *nde* égal à l'Angle *NDE* que l'Aiguille aimantée faisoit en *D* avec le rayon visuel *DE*, on portera de *d* en *e* autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans *DE*.

Comme les Droites *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, qui joignent les Piquets plantés le long de la Riviere ou du Chemin, sont proportionnelles aux Droites correspondantes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, tracées à part sur un papier volant, & que ces Lignes correspondantes renferment des Angles égaux chacun à chacun; il est aisé de voir que les Points *A*,*B*,*C*,*D*,*E*, & leurs correspondans *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, sont semblablement placés les uns à l'égard des autres. Car en tirant les Droites *AC*, *BD*, *CE*, & leurs correspondantes *ac*, *bd*, *ce*, les

Triangles *ABC*, *BCD*, *CDE*, seront semblables aux Triangles *abc*, *bcd*, *cde*. Ainsi la Figure *abcde*, qu'on a construite à part, représente le cours de la Riviere ou du Chemin *ABCDE*.

Fig. 235, 236 & 234. Si la distance des Points extrêmes *a*, *e*, de la Figure qu'on a décrite à part se trouve à distance des Points a, e, marqués sur la Carte, on achévera l'opération en rapportant ou calquant sur la Carte la Figure *abcde*; & l'on aura sur la Carte un trait abcde qui représentera la partie *ABCDE* de la Riviere ou du Chemin qu'il falloit lever.

Lorsque la distance *ae* des Points extrêmes de la Figure tracée à part est plus ou moins grande que la distance a e des Points donnés sur la Carte, on a recours à différens expédiens dont il est inutile de parler ici, pour corriger la Figure qu'on a faite à part, ou pour en faire raccorder les extrêmités *a*, *e*, avec les Points a, e, donnés sur la Carte.

III.

Fig. 237 & 238. 292 Lorsque le terrein qu'on doit lever n'est pas d'une grande étendue, comme une piece de Terre, on se sert assez souvent, pour en déterminer la figure, d'une Équerre d'Arpenteur garnie de quatre Pinules, dont les fentes sont dans deux Plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons que *ABCDEF* soit le terrein dont il faut lever le Plan. Après avoir tiré ou marqué avec des Piquets une Droite *FD* qui passe par deux Points quelconques les plus commodes de la Figure, on cherchera par le moyen de l'Équerre les Points *G*, *H*, *I*, *K*, de cette Ligne, qui répondent perpendiculairement aux Angles *A*, *B*, *C*, *E*, de la Figure.

Les Points *G*, *H*, *I*, *K*, étant ainsi déterminés, on

on meſurera les Perpendiculaires *AG*, *BH*, *CI*, *EK*; & l'on meſurera auſſi les parties *FG*, *GH*, *HI*, *IK*, *KD*, de la Droite *FD*.

Toutes ces meſures étant priſes ſur le terrein, on les rapportera ſur le papier comme il ſuit.

Après avoir fait une Échelle dont les parties repréſentent des toiſes ou autres meſures dont on s'eſt ſervi pour meſurer ſur le terrein, on tirera une Droite *fd* égale à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de meſures dans la Ligne entiere *FD* : & ayant marqué ſur cette Ligne des Points *g*, *h*, *i*, *k*, tels que les parties *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, contiennent autant de parties de l'Échelle, qu'on a trouvé de meſures dans *FG*, *GH*, *HI*, *IK*, on élévera ſur la Ligne *FD* des Perpendiculaires *ga*, *hb*, *ic*, *ke*, égales à autant de parties de l'Échelle, qu'on a trouvé de meſures dans les Perpendiculaires correſpondantes *GA*, *HB*, *IC*, *KE*. Enfin l'on joindra les Points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, par des Lignes droites *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*, qui repréſenteront ſur le papier le contour du terrein *ABCDEFA*; ce qui eſt facile à démontrer.

Car les Triangles rectangles *FGA*, *AGD*, *FHB*, *BHD*, *FIC*, *CID*, *FKE*, *EKD*, & leurs correſpondans *fga*, *agd*, *fhb*, *bhd*, *fic*, *cid*, *fke*, *ekd*, ayant les côtés proportionnels autour de l'Angle droit, ſeront ſemblables chacun à chacun. Ainſi les Triangles *FAD*, *FBD*, *FCD*, *FED*, & leurs correſpondans *fad*, *fbd*, *fcd*, *fed*, ſeront composés de Triangles ſemblables chacun à chacun, & ſeront par conſéquent ſemblables (*N*°. 269.) : d'où il ſuit (*N*°. 273.) que les Points *A*, *B*, *C*, *E*, & leurs correſpondans *a*, *b*, *c*, *e*, ſeront ſemblablement placés à l'égard des deux Droites *FD*, *fd*; & que tous les Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, & leurs correſpondans *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ſeront ſemblablement placés entr'eux.

I V.

293 Enfin lorſque le terrein dont on doit lever le Plan, n'a que très-peu d'étendue, on le diviſe en Triangles par des Lignes droites tirées d'un même Angle à tous les autres; & après avoir meſuré tous les côtés de ces Triangles, on fait ſur le papier des Triangles ſemblables à ceux qu'on a meſurés ſur le terrein, en donnant aux côtés des Triangles qu'on trace ſur le papier autant de parties de l'Échelle qu'on a trouvé de meſures dans les côtés des Triangles du terrein. Comme nous avons donné (*N*o. 270.) la maniere de faire des Triangles ſemblables à d'autres dont tous les côtés ſont connus, il eſt inutile d'entrer dans un plus grand détail par rapport à la maniere de lever le Plan d'un terrein de peu d'étendue.

CHAPITRE IV.

Des Rapports des Lignes homologues, & des Contours des Figures ſemblables.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. 294 NOus avons démontré (*N*o. 278.) que toutes les Droites telles que FG, RS, qui ſe terminent à des Points ſemblablement placés à l'égard de deux Lignes droites AB, MN, qui peuvent être les côtés homologues de deux Polygones ſemblables $ABCDE$, $MNOPQ$, étoient en même rapport que ces Lignes droites ou côtés homologues AB, MN: & comme les Polygones ſemblables ont eſſentiellement tous leurs côtés homologues proportionnels (*N*o. 243.), il eſt clair que toutes les Lignes droites telles que FG, RS, qui ſe termineront à des

Points semblablement placés à l'égard de deux côtés homologues AB, MN, de deux Polygones semblables, seront en même rapport que tous les côtés de ces Polygones.

THÉORÊME.

295 *Les circuits de deux Polygones semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues.*

DÉMONSTRATION.

Puisque les Polygones *ABCDEF*, *MNOPQR*, sont semblables, on aura (*N°*. 243.) Fig. 204 ou 205.

$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ :: EF : QR :: FA : RM.$

Donc (*N°*. 217.) $AB+BC+CD+DE+EF+FA : MN+NO+OP+PQ+QR+RM :: AB : MN$; c'est-à-dire, que le contour du premier Polygone est au contour du second, comme un côté du premier est à un côté homologue du second. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

296 Donc les contours de deux Polygones semblables sont entr'eux comme les Lignes homologues FG, RS, qui se terminent à des Points semblablement placés : car ces contours sont en même raison que les côtés homologues AB, MN (*N°*. 295.) ; & ces côtés homologues sont proportionnels aux Lignes homologues FG, RS (*N°*. 294.). Fig. 219, 220 ou 221 & 222.

COROLLAIRE II.

297 Soit que deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, soient inscrits dans des Cercles, soit qu'ils ayent seulement trois An- Fig. 223, 224, 225 & 226.

gles correspondans aux Circonférences de ces Cercles, les circuits de ces Polygones seront proportionnels aux Rayons de leurs Cercles. Car les contours de ces Polygones sont proportionnels à leurs côtés homologues *AB*, *MN* (*N°*. 295.); & les Rayons étant terminés par des Points semblablement placés dans les Polygones, ces côtés homologues sont proportionnels aux Rayons des Cercles dont il s'agit ici.

Comme les Rayons sont proportionnels aux Diametres, c'est-à-dire, au double des mêmes Rayons, il suit encore que les circuits des mêmes Polygones sont proportionnels aux Diametres de leurs Cercles.

Corollaire III.

Fig. 228 & 229, ou 230 & 231. 298 Soit que deux Polygones semblables *ABCDEF*, *abcdef*, soient circonscrits à des Cercles, soit que les Cercles ne soient touchés que par trois côtés correspondans de ces Polygones, les contours de ces Polygones seront proportionnels aux Rayons *KN*, *kn*, de ces Cercles: puisque les contours de ces Polygones sont proportionnels à leurs côtés homologues *AB*, *ab* (*N°*. 295.); & que les Centres des Cercles étant (*N°*. 288.) semblablement placés dans les deux Polygones, les côtés homologues *AB*, *ab*, sont proportionnels aux Rayons *KN*, *kn*.

Comme les Rayons sont proportionnels au double des mêmes Rayons, c'est-à-dire, à leurs Diametres, il suit encore que les circuits des mêmes Polygones sont proportionnels aux Diametres de leurs Cercles.

Corollaire IV.

299 Les Circonférences de deux Cercles sont entr'elles comme leurs Rayons, ou comme leurs Diametres.

Car deux Polygones réguliers semblables d'une infinité de côtés, inscrits ou circonscrits à des Cercles, different infiniment peu de ces Cercles : ainsi ces Polygones d'une infinité de côtés, & leurs Cercles inscrits ou circonscrits, peuvent être pris les uns pour les autres. Mais les contours de ces Polygones semblables tous deux inscrits, ou tous deux circonscrits à des Cercles, sont entr'eux comme les Rayons ou comme les Diametres de ces Cercles. Donc les Circonférences des Cercles qui different infiniment peu des contours de ces Polygones, sont aussi entr'elles comme les mêmes Rayons, ou comme les mêmes Diametres; & sont par conséquent proportionnels à leurs propres Rayons, ou à leurs propres Diametres.

SCHOLIE.

Ce Théorême & ses Corollaires sont le fondement de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication, & de la Division des contours des Figures semblables, dans le cas où l'on veut que la Figure résultante soit semblable à celles qui sont proposées.

I.

300 Si l'on veut avoir une Figure Z dont le contour soit égal à la somme des contours de deux Figures X, Y, qui lui sont semblables, & dont AB, CD, sont deux Lignes homologues ; on prendra une Droite EF égale à la somme $AB+CD$ des deux côtés homologues des Figures X, Y. Puis sur EF considérée comme Ligne homologue à AB, CD, l'on construira (N°. 270.) un Polygone Z, semblable aux deux donnés X & Y : & le contour de ce nouveau Polygone Z sera égal à la somme des contours des deux Polygones proposés X & Y. Fig. 239, 240, 241, ou 242, 243, 244, ou 245, 246, 247.

Car les contours des Polygones semblables *Z*, *X*, *Y*, sont proportionnels à leurs Lignes homologues *EF*, *AB*, *CD*. Mais par construction $EF = AB + CD$. Donc le contour du Polygone *Z* est égal à la somme des contours des deux autres Polygones *X*, *Y*.

II.

301 Si l'on demande un Polygone *X* dont le contour soit égal à la différence des contours de deux Polygones *Z*, *Y*, qui lui sont semblables, & dont *EF*, *CD*, sont deux Lignes homologues ; on prendra une Droite *AB*, égale à la différence $EF - CD$ des Lignes homologues des Figures données. Puis sur cette Droite *AB*, considérée comme Ligne homologue à *EF* ou *CD*, l'on construira un Polygone *X* semblable à l'un *Z* ou *Y* des deux Polygones donnés : & le contour de ce nouveau Polygone *X* sera égal à la différence des contours des deux autres Polygones *Z*, *Y*.

Car puisque $AB = EF - CD$, l'on aura $AB + CD = EF$. Ainsi la somme des contours des deux Polygones *X*, *Y*, sera égale au contour du Polygone *Z*. Donc en retranchant de chaque membre de cette Égalité le contour du Polygone *Y*, il restera le contour du Polygone *X* égal au contour du Polygone *Z* moins le contour du Polygone *Y*, c'est-à-dire, égal à la différence des contours des deux Polygones donnés *Z* & *Y*.

III.

Fig. 240, 241, ou 243, 244, ou 246, 247.

302. Lorsqu'on voudra avoir un Polygone *Z* dont le contour soit multiple du contour d'un Polygone semblable *Y*, on prendra une Droite *EF*, qui soit également multiple d'une Ligne *CD* du Polygone

Y. Puis sur cette Droite EF, considérée comme Ligne homologue à CD, l'on construira un Polygone Z semblable au Polygone donné Y : & le contour de ce nouveau Polygone Z sera autant multiple du Polygone donné Y, que la Ligne EF le sera de la Ligne CD ; puisque le contour du Polygone Z sera à celui du Polygone Y, comme EF est à CD.

I V.

303 Enfin si l'on veut partager le contour du Polygone Z en raison donnée, & faire de ses parties les contours d'autres Polygones X & Y semblables à Z, on partagera une Ligne EF du Polygone Z dans la raison donnée. Puis ayant fait deux Droites AB, CD, égales aux parties de EF, on construira sur elles, comme sur des Lignes homologues à EF, des Polygones X & Y semblables à Z : & les contours de ces nouveaux Polygones seront les parties demandées du contour du Polygone Z. Fig. 239, 240, 241, ou 242, 243, 244, ou 245, 246, 247.

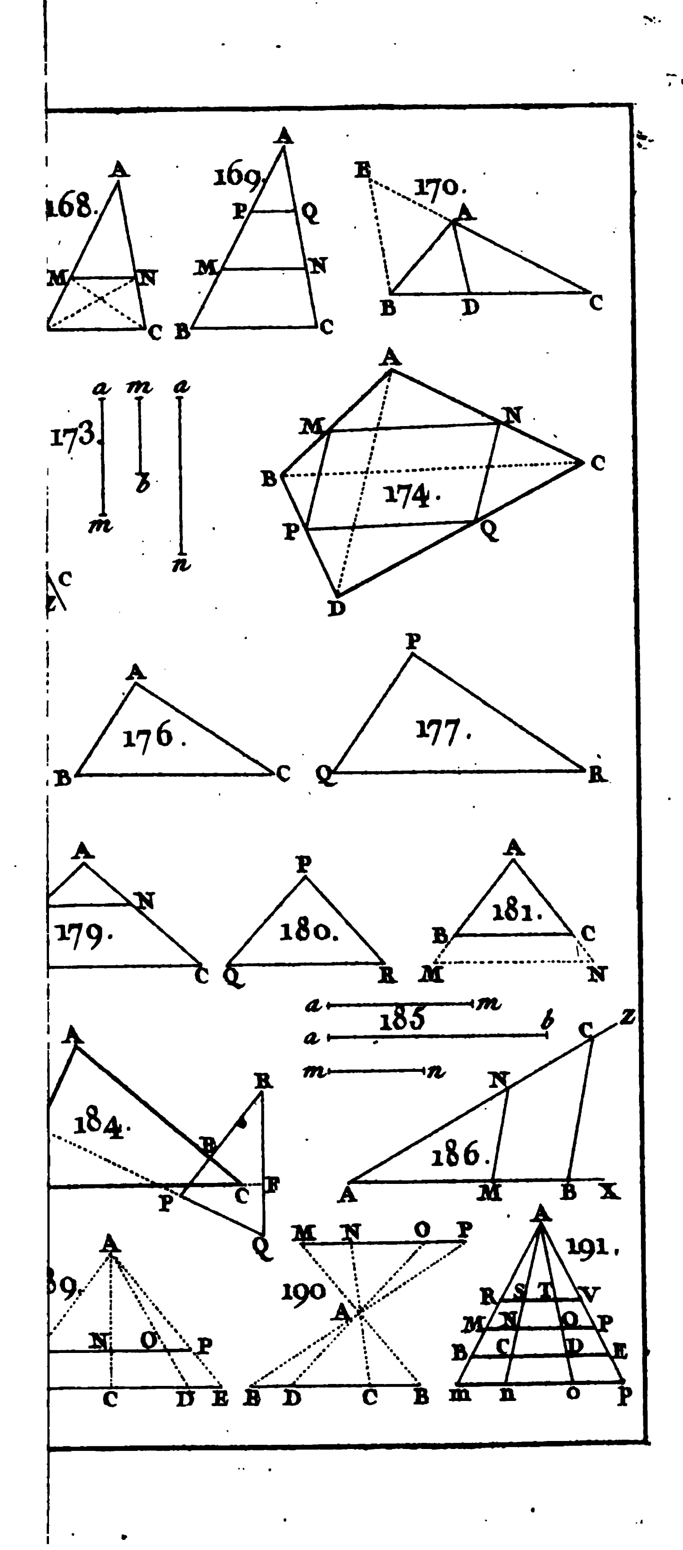
Premièrement, les contours des Polygones X & Y seront ensemble égaux au contour du Polygone Z ; puisque $AB + CD = EF$. Secondement, les deux Polygones X & Y auront des contours proportionnels à leurs Lignes homologues AB, CD, qui sont égales aux parties dans lesquelles on a partagé EF suivant le rapport demandé. Ainsi le contour du Polygone Z est partagé dans la raison donnée, aux deux Polygones X, Y, semblables à Z.

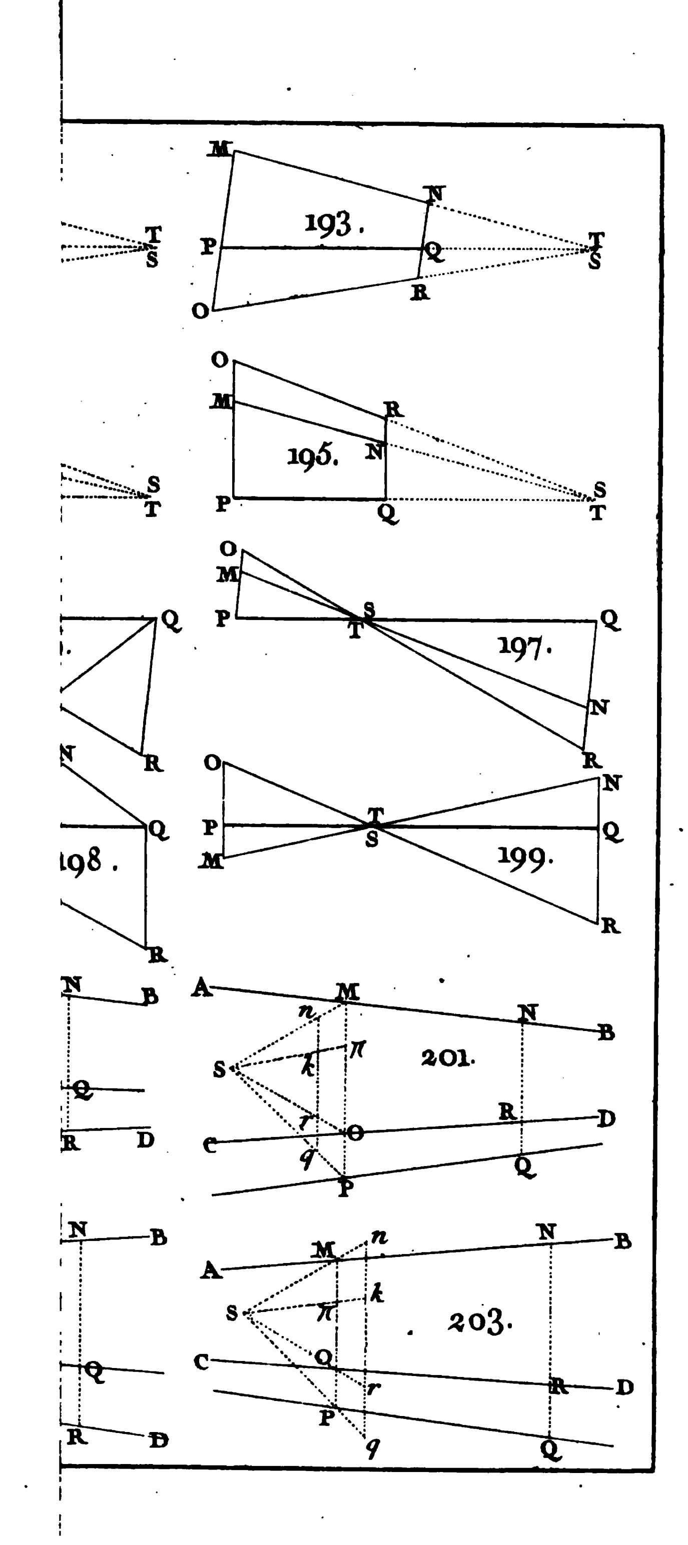
Avertissement.

304 Si les Figures sur lesquelles il faudra opérer sont de simples Polygones semblables, leurs côtés homologues seront les Lignes homologues les plus

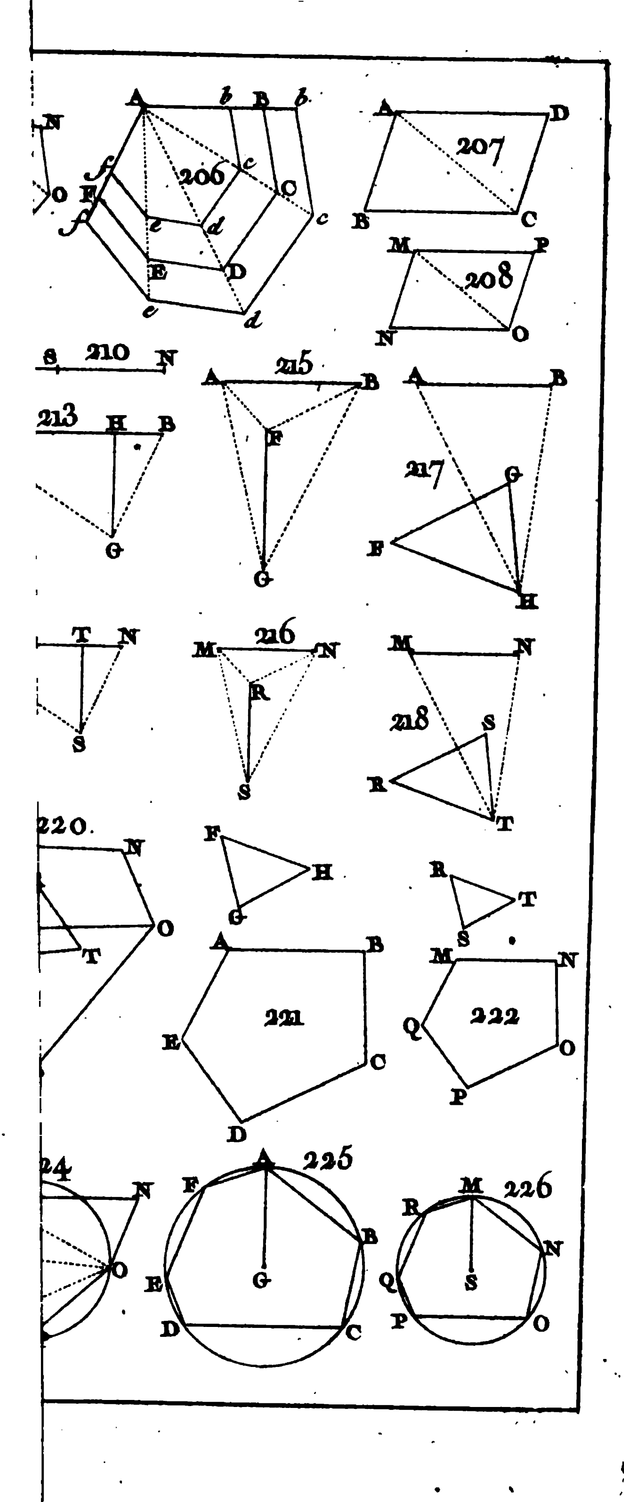
commodes à employer. Mais si les Figures semblables sont inscrites ou circonscrites à des Cercles, ou ont une liaison immédiate avec des Cercles, ou sont elles-mêmes des Cercles, il sera très-commode de prendre les Rayons de ces Cercles pour Lignes homologues.

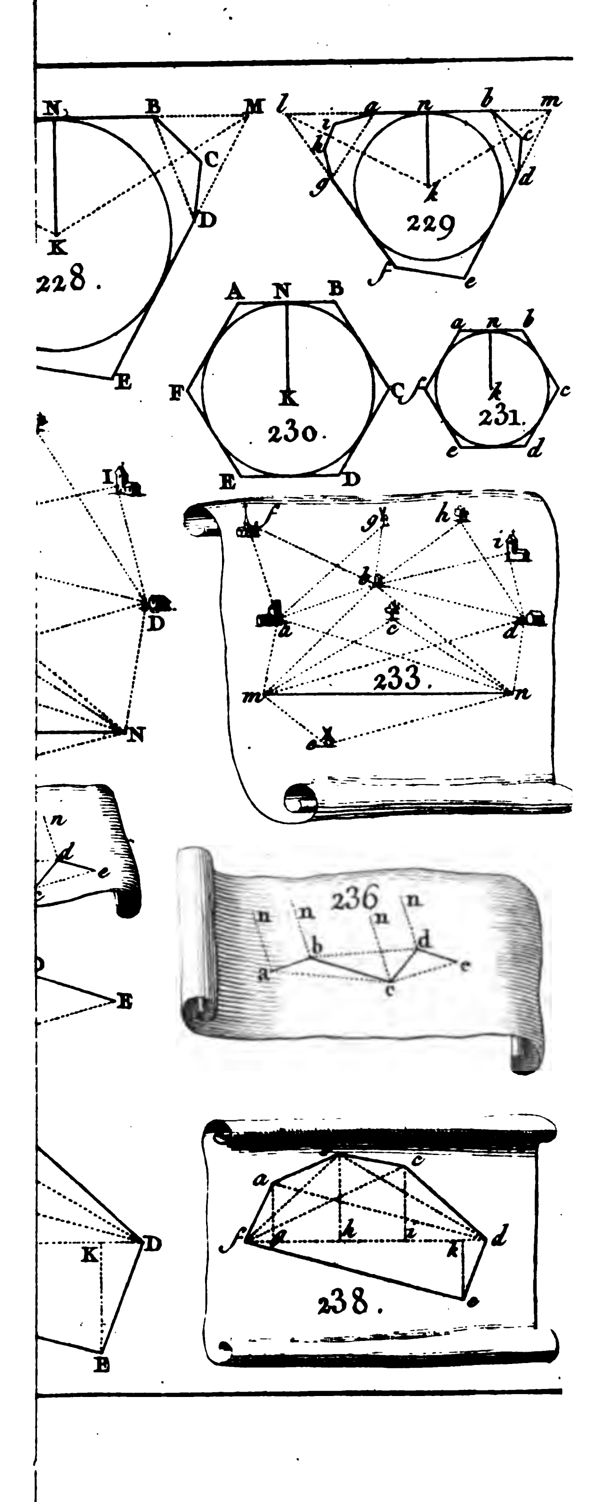



168.
169.
170.
173.
174.
176.
177.
179.
180.
181.
184.
185.
186.
190
191.



193.
195.
197.
198.
199.
201.
203.


206
207
208
210
213
215
216
217
218
220.
221
222
225
226



228.
229
230.
231.
233.
236
238.

242 X A B

243 Y C D

244 Z E F

F

248 E I D F G H A B C

249 E K D F G A B C H I

250 A C B D

252. M P Q O

253. M P N Q O

256 L K M N A O D C F G

257 A E F B D G H C I K L M N



ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE V.

Des Rapports des Surfaces des Parallélogrammes, des Triangles, & des Figures semblables.

CHAPITRE PREMIER.

Des Rapports de la valeur des Quarrés, relativement aux Lignes ou portions de Ligne sur lesquelles ces Quarrés sont construits.

305 N a démontré (*N°.* 146.) que si les côtés contigus d'un Parallélogramme rectangle sont évalués en mesures égales quelconques, & qu'on multiplie le nombre des mesures contenues dans la base par le nombre des mesures contenues dans le côté contigu à cette base,

le produit est le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface de ce Parallélogramme ; & l'on a fait voir que chacune de ces mesures quarrées a pour côté la mesure dont on s'est servi pour déterminer la longueur des côtés contigus du Rectangle : & comme un Quarré est un Parallélogramme rectangle dont tous les côtés sont égaux, il est clair qu'en multipliant par lui-même le nombre des mesures contenues dans le côté d'un Quarré, on aura le nombre des mesures quarrées contenues dans ce Quarré.

Or les Quarrés sont entr'eux comme les nombres des mesures égales qu'ils contiennent. Ainsi quand on voudra connoître le Rapport de deux Quarrés dont les côtés seront évalués en mesures égales, il faudra multiplier par lui-même le nombre de mesures contenu dans un côté de chacun d'eux ; & l'on aura deux produits numériques qui seront en même rapport que ces Quarrés.

Par exemple, si l'on veut savoir en quel rapport sont deux Quarrés dont le premier a 2 mesures, & le second 3 mesures dans son côté, c'est-à-dire, dont les côtés sont comme 2 & 3, on multipliera les deux nombres 2 & 3 chacun par lui-même ; & l'on aura deux produits quarrés numériques 4 & 9, qui seront en même rapport que les deux Quarrés proposés.

Si l'on veut savoir en quel rapport sont deux Quarrés construits, l'un sur le Rayon, & l'autre sur le Diametre d'un Cercle ; comme le Diametre est double du Rayon, c'est-à-dire, que le Rayon est au Diametre comme 1 est à 2, on multipliera les deux nombres 1 & 2 chacun par lui-même ; & les produits 1 & 4 qu'on trouvera seront en même rapport que les deux Quarrés construits, l'un sur le Rayon, l'autre sur le Diametre d'un même Cercle. On fera la même

chose pour tous les autres Quarrés dont on voudra connoître les Rapports en nombres.

THÉORÈME.

306 *Soit une Droite* AC *coupée en deux parties quelconques* AB, BC : *le Quarré de la Droite entiere* AC, *sera composé du Quarré de sa premiere partie* AB, *du Quarré de sa seconde partie* BC, *& de deux Rectangles qui auront chacun pour côtés contigus les deux parties* AB, BC ; *c'est-à-dire, qu'on aura* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$. Fig. 248.

DÉMONSTRATION.

Soit construit sur *AC* un Quarré *ACDE* : & ayant pris sur le côté *AE* une partie *AF=AB*, ou une partie *FE=BC*, soient menées les Droites *FH*, *BI*, parallélement aux côtés *AC*, *AE*. Il est évident que le Quarré *ACDE* construit sur *AC*, contiendra les quatre Rectangles *AG*, *GD*, *BH*, *FI*, qui sont faciles à connoître relativement aux parties *AB*, *BC*, de la Droite *AC*.

1°. Comme on a fait *AF=AB*, le premier Rectangle *AG* est le Quarré de la premiere partie *AB* de la Droite *AC*.

2°. Comme *GH* & *GI* sont égales aux deux parties égales *BC*, *FE*, le second Rectangle *GD* est un Quarré égal à celui de *BC*.

3°. Puisque *AF* ou *BG=AB*, le troisiéme Rectangle *BH* a les côtés contigus égaux aux deux parties *AB*, *BC*, de la Droite *AC* : ainsi ce Rectangle *BH=AB×BC* (N°. 146.).

4°. Puisque *FG=AB* & *FE=BC*, le Rectangle *FI=AB×BC*.

Donc le Quarré *ACDE* construit sur la Droite *AC* divisée en deux parties quelconques *AB*, *BC*,

est composé du Quarré de la premiere partie *AB*; du Quarré de la seconde partie *BC*, & de deux Rectangles, dont les côtés contigus sont égaux aux deux parties *AB*, *BC*;

C'est-à-dire, que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÊME.

Fig. 248. 307 *Une Droite* AC *étant divisée en deux parties quelconques* AB, BC, *le Quarré de l'une* AB *de ses parties, vaut le Quarré de la Ligne entiere* AC, *plus le Quarré de l'autre partie* BC, *moins deux Rectangles qui ont chacun pour côtés contigus la Droite entiere* AC, *& sa partie* BC.

C'est-à-dire, que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$.

DÉMONSTRATION.

Après avoir construit un Quarré *ACDE* sur la Ligne entiere *AC*, qu'on fasse *AF=AB*, ou *FE=BC*; & qu'on mene les Droites *FH*, *BI*, paralléles aux côtés *AC*, *AE*, du Quarré *ACDE*: on prouvera, comme dans le Théorême précédent, que *AG*, *GD*, sont les Quarrés des deux parties *AB*, *BC*, de la Droite *AC*; & que les deux Rectangles *BD*, *FD*, ont des côtés contigus égaux à la Ligne *AC* & à sa partie *BC*; d'où il suit (*N°*. 146.) que chacun de ces Rectangles *BD*, *FD*, doit être exprimé par *AC* × *BC*.

Or il est visible que l'excès du Quarré *ACDE*. sur le Quarré *AG*, est composé des deux Rectangles *BD*, *FI*. Si l'on ajoûte encore le Quarré *GD* au Quarré *ACDE*, l'excès de la somme de ces Quarrés sur le Quarré *AG*, sera composé des deux Rec-

tangles BD, FI, & du Quarré GD : & comme le Rectangle FI & le Quarré GD composent ensemble le Rectangle FD, il est clair que l'excès de la somme des Quarrés $ACDE$, GD, sur le Quarré AG, sera composé des deux Rectangles égaux BD, FD, ou sera égal au double du Rectangle BD.

On aura donc le Quarré AG construit sur AB, en retranchant des deux Quarrés construits sur AC & sur BC, la quantité $2\,AC \times BC$, ou le double du Rectangle BD, dont les côtés contigus IB, BC, sont égaux à la Ligne AC, & à sa partie BC; c'est-à-dire, qu'on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

308 La partie AB de la Droite AC étant égale à $AC - BC$, il est clair que la Quantité $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC$, qu'on a trouvée pour la valeur du Quarré de AB, est le Quarré de $AC - BC$. Ainsi le Quarré de la différence $AC - BC$ de deux Lignes, contient la somme $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ des Quarrés de ces deux Lignes moins $2\,AC \times BC$, c'est-à-dire, moins deux fois le produit de l'une de ces Lignes multipliée par l'autre.

Or on a trouvé (*No.* 306.) que le Quarré d'une Droite AC, ou de la somme $AB + BC$ de ses parties, contient aussi la somme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ des Quarrés de ses deux parties plus $2AB \times BC$, c'est-à-dire, plus deux fois le produit de l'une de ses parties multipliée par l'autre.

On reconnoîtra donc que trois termes parmi lesquels il y aura deux Quarrés positifs de deux Lignes,

avec le double du produit positif ou négatif de l'une de ces Lignes multipliée par l'autre, composeront le Quarré de la somme ou de la différence de ces deux Lignes, suivant que le double produit de ces Lignes sera positif ou négatif; c'est-à-dire, suivant que ce double produit aura le Signe + de l'Addition, ou le Signe − de la Soustraction.

On reconnoîtra, par exemple, que les trois termes $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$, parmi lesquels sont les deux Quarrés positifs $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ de deux Lignes AB, BC, avec le double produit positif $2AB \times BC$ de ces deux Lignes, composent le Quarré de la somme $AB + BC$ de ces deux Lignes.

On reconnoîtra aussi que les trois termes $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$, parmi lesquels sont les Quarrés vrais ou positifs $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ de deux Lignes AB, BC, avec le double produit négatif $-2AB \times BC$ des deux mêmes Lignes, composent le Quarré de la différence $AB - BC$ de ces deux Lignes.

309 On rencontre souvent des Quarrés qui sont négatifs, c'est-à-dire, qui sont retranchés de quelqu'autre Quantité. Ces Quarrés négatifs ayant leurs Signes contraires à ceux des Quarrés vrais ou positifs, il est aisé de les distinguer.

Par exemple, $-\overline{AC}^2, -\overline{AB}^2, -\overline{BC}^2$, ayant devant eux le Signe − de Soustraction, contraire au Signe + d'Addition que les véritables Quarrés $\overline{AC}^2, \overline{AB}^2, \overline{BC}^2$, des Lignes AC, AB, BC, auroient ou seroient réputés avoir devant eux, sont des Quarrés négatifs ou retranchés de quelqu'autre Quantité.

Les trois termes $-\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$, qui

sont tous le Signe — opposé au Signe +, qui est devant les trois termes $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$ du véritable Quarré de la somme $AB + BC$ de deux Lignes, est le Quarré négatif de $AB + BC$.

Les trois termes $- \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$, qui sont exactement contraires aux trois termes $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$, dont le Quarré de la différence $AB - BC$ de deux Lignes est composé, sont le Quarré négatif de $AB - BC$.

THÉORÉME.

310 *La différence de deux Quarrés construits sur deux Droites* AC, BC, *est égale au produit fait de la somme de ces Lignes & de la différence de ces mêmes Lignes; c'est-à-dire, que* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (AC + BC) \times (AC - BC)$. Fig. 249.

DÉMONSTRATION.

Ayant placé la Droite BC sur la Droite AC, soient construits sur elles deux Quarrés $ACDE$, $BCGF$, qui ayent un Angle commun. Puis ayant prolongé le côté AE du premier Quarré, d'une quantité $AH = BC$, soit menée par le Point H parallélement à AC, une Droite HI, qu'on terminera par le prolongement du côté BF du second Quarré. Enfin soit encore prolongé le côté BF jusqu'en K.

Puisque (*Construction*) $AC = CD$, & $BC = CG$, en retranchant la seconde Égalité de la premiere, on aura $AB = GD$: & comme on a fait $AH = BC$ ou FG, les deux Rectangles HB, FD, auront des côtés contigus égaux chacun à chacun, & seront par conséquent égaux. Ainsi en ajoûtant à chacun d'eux le Rectangle AK, on aura $HB + AK$ ou $HK = FD + AK$.

Or $FD+AK$ eſt la différence des deux Quarrés $ACDE$, $BCGF$, conſtruits ſur AC & ſur BC. Ainſi HK eſt auſſi la différence des deux mêmes Quarrés ; c'eſt-à-dire, que $ACDE-BCGF$ ou $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=HK$ ou $=EH\times AB$.

Mais 1°. $EH=AB+BC$; puiſque (*Conſtruction*) $AE=AC$ & $AH=BC$. 2°. $AB=AC-BC$;

Donc $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=(AC+BC)\times(AC-BC)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 250. 311 Lorſqu'une Ligne droite AD eſt coupée en deux parties égales en C, & en deux parties inégales en B, le Quarré de ſa moitié AC moins le Quarré de la partie moyenne BC, eſt égal au produit des deux parties inégales AB, BD; c'eſt-à-dire, que $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=AB\times BD$.

Car AB eſt la ſomme $AC+BC$ des deux Lignes AC, BC; & puiſque $CD=AC$, on a BD ou $CD-BC=AB-BC$. Ainſi BD eſt la différence des deux mêmes Lignes AC, BC.

Donc puiſque (*N°.* 310.) on a

$$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=(AC+BC)\times(AC-BC):$$

on aura auſſi $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=AB\times BD$.

REMARQUE.

312 Lorſque deux Quarrés tels que $\overline{AC}^2$ & $\overline{BC}^2$, ſont exprimés chacun par un ſeul terme, il eſt aiſé de reconnoître la ſomme $AC+BC$ & la différence $AC-BC$ de leurs Racines; & l'on voit tout d'un coup (*N°.* 310.) que la différence $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$ de ces

Quarrés

Quarrés, eſt le produit de la multiplication de $AC+BC$ par $AC-BC$.

Lorſque l'un des deux Quarrés ſera compoſé de pluſieurs termes, & que l'un ſera ſouſtrait de l'autre; il ne ſera guères plus difficile d'apercevoir la ſomme & la différence de leurs Racines, ſi l'on a bien conçu ce que nous avons dit (*N*o. 309.) des Quarrés négatifs ou ſouſtraits de quelqu'autre quantité.

Par exemple, ſi l'on a $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC-\overline{AC}^2$, on verra aiſément que $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC$ eſt un vrai Quarré dont la Racine eſt $AB+BC$, & que $-\overline{AC}^2$ eſt un Quarré négatif ou ſouſtrait du premier; en ſorte que $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC-\overline{AC}^2$ eſt la différence de deux Quarrés, dont la ſomme des Racines eſt $AB+BC+AC$, & dont la différence des Racines eſt $AB+BC-AC$. Ainſi $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC-\overline{AC}^2$ eſt le produit de la multiplication de $AB+BC+AC$ par $AB+BC-AC$ (*N*o. 310.).

Si l'on avoit $\overline{AC}^2-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+2AB\times BC$, on reconnoîtroit que $\overline{AC}^2$ eſt un vrai Quarré dont la Racine eſt AC, & que le reſte $-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+2AB\times BC$ eſt un Quarré négatif contraire au vrai Quarré $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BC$, dont la Racine eſt $AB-BC$. Ainſi l'on verroit aiſément que la ſomme des Racines de ces Quarrés ſeroit $AC+AB-BC$; que la différence des mêmes Racines ſeroit $AC-AB+BC$; & que $\overline{AC}^2-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+2AB\times BC$ ſeroit par conſéquent le produit de $AC+AB-BC$ multiplié par $AC-AB+BC$.

Si le dernier article pouvoit faire quelque pei-

ne, ce ne seroit point par rapport à la somme $AC+AB-BC$ des deux Racines, dont l'une est AC & l'autre $AB-BC$; & toute la difficulté se réduiroit à prendre la différence de ces Racines, c'est-à-dire, à soustraire la Racine $AB-BC$ du Quarré négatif, de la Racine AC du Quarré positif. Mais cette soustraction deviendra facile, si au lieu de AC l'on prend $AC+AB-BC-AB+BC$, qui n'en est point différent. Car alors on n'aura aucune peine à en soustraire $AB-BC$; & le reste sera évidemment $AC-AB+BC$.

Par la même raison, si l'on trouve $\overline{AB}^2\times(2BC)^2-(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2$, on verra aisément que $\overline{AB}^2\times(2BC)^2$ est un vrai Quarré, dont la Racine est $AB\times 2BC$, & que $-(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2$ est un Quarré négatif contraire au vrai Quarré $(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2$, dont la Racine est $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$. Ainsi l'on reconnoîtra que la somme des Racines de ces Quarrés est $AB\times 2BC+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$, & que la différence des mêmes Racines est $AB\times 2BC-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$.

Enfin l'on conclurra (*N°.* 310.) que la Quantité $\overline{AB}^2\times(2BC)^2-(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2$ est le produit de la multiplication de $AB\times 2BC+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$ par $AB\times 2BC-\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$.

Comme on fera souvent usage des trois derniers Théorêmes dans la suite de ces Élémens, & dans toutes les parties des Mathématiques traitées synthétiquement, il est nécessaire de les bien savoir, & de les avoir présens à l'esprit, pour les appliquer à propos.

CHAPITRE II.

Des Rapports des Surfaces des Parallélogrammes, des Triangles, & des Figures semblables en général.

DANS tout ce Chapitre on entendra par Triangle, Parallélogramme & Polygone, la surface même de ces Figures ; & lorsqu'il s'agira de leurs côtés, on le dira expressément.

THÉORÉME.

313 *Deux Parallélogrammes quelconques* ABCD, MNOP, *semblables ou non semblables, sont entr'eux comme les produits de leurs bases & de leurs hauteurs.* Fig. 251 & 252.

DÉMONSTRATION.

Les Parallélogrammes *ABCD*, *MNOP*, sont égaux aux produits $BC \times AE$, $NO \times MQ$, de leurs bases & de leurs hauteurs (*N*°. 142.) ; ainsi ils sont entr'eux comme ces produits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

314 Donc deux Triangles quelconques *BAC*, *NMO*, sont aussi entr'eux comme les produits $BC \times AE$, $NO \times MQ$, de leurs bases & de leurs hauteurs. Car ces Triangles sont les moitiés de ces produits (*N*°. 144.) ; & les moitiés sont entr'elles comme les touts. Fig. 251 & 252.

THÉORÊME.

Fig. 251 & 252. 315 *Les Parallélogrammes* ABCD, MNOP, *qui ont un Angle égal, & par conséquent tous les Angles égaux chacun à chacun, sont entr'eux comme les produits des côtés adjacens à l'Angle égal. Par exemple, si l'Angle* B=N, *on aura*

ABCD : MNOP :: AB×BC : MN×NO.

DÉMONSTRATION.

Des Angles égaux A & M, soient abaissées les Perpendiculaires AE, MQ, sur les côtés BC, NO, adjacens aux deux Angles égaux B, N; les Triangles AEB, MQN, seront semblables (N°. 254.). Car (*hyp.*) l'Angle $B=N$, & les Angles en E & Q seront droits (*Construction*), & par conséquent égaux. Ainsi l'on aura

$$AE:MQ::AB:MN.$$

Mais $$BC:NO::BC:NO.$$

Donc en multipliant par ordre, on aura

$$AE\times BC:MQ\times NO::AB\times BC:MN\times NO.$$

Mais le Parallélogramme $ABCD=AE\times BC$,
Et le Parallélogramme $MNOP=MQ\times NO$.
Donc $ABCD:MNOP::AB\times BC:MN\times NO$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Fig. 251 & 252. 316 Donc deux Triangles BAC, NMO, qui ont un Angle égal, par exemple, l'Angle $B=N$, sont entr'eux comme les produits $AB\times BC:MN\times NO$ des côtés adjacens à l'Angle égal.

Car ces Triangles BAC, NMO, sont les moitiés

des Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, qui ont l'Angle $B=N$: ainsi ils sont en même rapport que ces Parallélogrammes; & par conséquent

$$BAC : NMO :: AB \times BC : MN \times NO.$$

THÉORÉME.

317 *Deux Parallélogrammes semblables* ABCD, MNOP, *sont entr'eux comme les Quarrés de leurs côtés homologues; c'est-à-dire, que* Fig. 251 & 253.

$$ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$$

DÉMONSTRATION.

Des Angles égaux A, M, soient abaissées les Perpendiculaires AE, MQ, sur les côtés homologues BC, NO: les Triangles AEB, MQN, seront semblables, car ils seront tous deux rectangles; & de plus l'Angle $B=N$, à cause que les Parallélogrammes sont semblables. On aura donc

$$AE : MQ :: AB : MN.$$

Mais puisque les Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, sont semblables, on aura

$$BC : NO :: AB : MN.$$

Multipliant ces deux Proportions par ordre, on aura

$$AE \times BC : MQ \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$$

Mais $ABCD = AE \times BC$, & $MNOP = MQ \times NO$ (No. 142.).

Donc $ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$.

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

318 Donc deux Triangles semblables BAC, NMO, sont entr'eux comme les Quarrés de leurs côtés homologues AB, MN. Car les Triangles Fig. 251 & 253.

semblables BAC, NMO, sont les moitiés des Parallélogrammes semblables $ABCD$, $MNOP$. Ainsi ils sont entr'eux comme ces Parallélogrammes, qui sont proportionnels aux Quarrés $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$, de leurs côtés homologues (*N*°. 317.).

THÉORÊME.

Fig. 254 & 255. 319 *Les surfaces des Polygones semblables* ABCDE, MNOPQ, *sont entr'elles comme les Quarrés* $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$, *de leurs côtés homologues.*

Démonstration.

De deux Points F, R, semblablement placés à l'égard de deux côtés homologues AB, MN, des deux Polygones, soient tirées des Droites à tous les Angles. Comme ces Points F, R, seront semblablement placés à l'égard de tous les autres côtés homologues (*N*°. 283.), les Triangles AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, seront semblables aux Triangles MRN, NRO, ORP, PRQ, QRM, chacun à chacun (*N*°. 273.). Ainsi ces Triangles comparés deux à deux seront entr'eux comme les Quarrés de leurs côtés homologues (*N*°. 317.). On aura donc

1°. $AFB : MRN :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$.

2°. $BFC : NRO :: \overline{BC}^2 : \overline{NO}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; car $BC : NO :: AB : MN$.

3°. $CFD : ORP :: \overline{CD}^2 : \overline{OP}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; car $CD : OP :: AB : MN$.

4°. $DFE : PRQ :: \overline{DE}^2 : \overline{PQ}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; car $DE : PQ :: AB : MN$.

5°. $EFA : QRM :: \overline{EA}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; car $EA : QM :: AB : MN$.

Et par conséquent

$AFB:MRN::BFC:NRO::CFD:ORP::DFE:PRQ::EFA:QRM$.

Donc (*N*°. 217.) $AFB+BFC+CFD+DFE+EFA : MRN+NRO+ORP+PRQ+QRM :: AFB:MRN :: \overline{AB}^2:\overline{MN}^2$; c'est-à-dire, $ABCDE:MNOPQ::\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

320 Donc deux Polygones semblables *ABCDE*, *MNOPQ*, sont entr'eux comme les Quarrés $\overline{FG}^2$, $\overline{RS}^2$; de deux Droites terminées par des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones. Fig. 254 & 255.

Car puisque les Droites *FG*, *RS*, sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones, ou à l'égard de deux de leurs côtés homologues quelconques *AB*, *MN*, on aura (*N*°. 278.) $AB:MN::FG:RS$; & par conséquent $\overline{AB}^2:\overline{MN}^2::\overline{FG}^2:\overline{RS}^2$.

Mais (*N*°. 319.) $ABCDE:MNOPQ::\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$.

Donc aussi $ABCDE:MNOPQ::\overline{FG}^2:\overline{RS}^2$.

COROLLAIRE II.

321 Donc deux Polygones semblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, qui ont trois Angles correspondans à la Circonférence, sont entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme les Quarrés des Diametres de leurs Cercles. Fig. 223 & 224.

Car si l'on tire les Rayons *GC*, *SO*, aux Angles correspondans *C*, *O*; comme les Centres *G*, *S*, sont des Points semblablement placés dans les deux Polygones (*N*°. 285.), & que les sommets des Angles

correſpondans C, O, y ſont auſſi ſemblablement placés (*N*°.277.), on aura $AB:MN::GS:SO$ (*N*°.278.), & par conſéquent $\overline{AB}^2:\overline{MN}^2::\overline{GC}^2:\overline{SO}^2$.

Mais (*N*°.319.) $ABCDEF:MNOPQR::\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$.

Donc auſſi $ABCDEF:MNOPQR::\overline{GC}^2:\overline{SO}^2$; c'eſt-à-dire, que les deux Polygones ſemblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, ſont proportionnels aux Quarrés des Rayons de leurs Cercles.

Et comme les Quarrés des Rayons ſont proportionnels aux Quarrés des Diametres, parce que les Rayons ſont proportionnels aux Diametres, il eſt clair que les mêmes Polygones ſemblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, ſont auſſi proportionnels aux Quarrés des Diametres de leurs Cercles.

Corollaire III.

Fig. 225 & 226. 322 Donc deux Polygones ſemblables *ABCDEF*, *MNOPQR*, inſcrits dans des Cercles, ſont auſſi entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme les Quarrés des Diametres de leurs Cercles.

Car ces Polygones ſemblables étant ſuppoſés inſcrits dans des Cercles, ont au moins trois Angles correſpondans aux Circonférences de leurs Cercles, & ſont par conſéquent dans le cas des Polygones du Corollaire précédent.

Corollaire IV.

Fig. 228 & 229. 323 Donc ſi deux Cercles ſont touchés par trois côtés homologues de deux Polygones ſemblables *ABCDEFGHI*, *abcdefghi*; ces Polygones ſeront proportionnels aux Quarrés des Rayons, ou aux Quarrés des Diametres de leurs Cercles.

Car ſi des Centres *K*, *k*, des deux Cercles, on mene les Rayons *KN*, *kn*, aux Points d'attouchement *N*, *n*, de

deux côtés homologues, ces Rayons *KN*, *kn*, seront perpendiculaires sur les côtés *AB*, *ab*; & (*N*°. 276.) les Points *N*, *n*, seront semblablement placés par rapport à ces mêmes côtés. Ainsi (*N*°. 278.) l'on aura $AB : ab :: KN : kn$, & par conséquent $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{KN}^2 : \overline{kn}^2$.

Mais les deux Polygones *ABCDEFGHI*, *abcdefghi*, étant semblables, on aura

$$ABCDEFGHI : abcdefghi :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Donc on aura aussi

$$ABCDEFGHI : abcdefghi :: \overline{KN}^2 : \overline{kn}^2;$$

c'est-à-dire, que les surfaces des deux Polygones dont il est question sont entr'elles comme les Quarrés des Rayons de leurs Cercles.

Et comme les Quarrés des Rayons sont proportionnels aux Quarrés des Diametres, les surfaces des mêmes Polygones seront aussi proportionnelles aux Quarrés des Diametres des mêmes Cercles.

COROLLAIRE V.

324 Donc les surfaces de deux Polygones semblables circonscrits à des Cercles, sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons, ou aux Quarrés de leurs Diametres. Car lorsque tous les côtés des Polygones semblables touchent des Cercles, il y a toûjours dans ces deux Polygones au moins trois côtés homologues qui touchent ces Cercles. Ainsi ces Polygones sont entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme les Quarrés des Diametres de leurs Cercles (*N*°.323.).

COROLLAIRE VI.

325 Donc les surfaces de deux Cercles sont entr'elles comme les Quarrés de leurs Rayons, ou comme les Quarrés de leurs Diametres. Car deux

Cercles peuvent être regardés comme deux Polygones réguliers semblables, chacun d'une infinité de côtés, tous deux inscrits, ou tous deux circonscrits à des Cercles : & comme les surfaces des Polygones semblables, même d'une infinité de côtés, sont proportionnelles aux Quarrés des Rayons ou des Diametres des Cercles inscrits ou circonscrits, il est clair que les surfaces des Cercles, qui different infiniment peu de ces Polygones, sont aussi proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons ou de leurs Diametres.

CHAPITRE III.

Des Rapports des Figures semblables dont les côtés homologues forment un Triangle rectangle.

DÉFINITION.

LORSQU'UN Triangle est rectangle, le côté opposé à l'Angle droit s'appelle *Hypothénuse.*

THÉORÊME.

Fig. 256. 326 *Si trois Quarrés* BG, AH, AO, *forment par leurs côtés un Triangle rectangle* BAC, *& qu'ayant abaissé une Perpendiculaire* AD *de l'Angle droit sur l'hypothénuse, on la prolonge jusqu'en* F *au travers du Quarré* BG *construit sur l'hypothénuse ; on aura* BF=AH *&* CF=AO : *en sorte que le Quarré* BG *de l'hypothénuse sera égal à la somme* AH + AO *des deux Quarrés construits sur les côtés* AB, AC, *de l'Angle droit.*

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés *EB*, *GC*, du Quarré de l'hypothénuse, & leur Parallele *AF*, jusqu'à ce

que leurs prolongemens rencontrent en *I*, *M*, *L*, les côtés prolongés *HK*, *ON*, des deux autres Quarrés. On trouvera que

1°. Les deux Triangles rectangles *BAC*, *BHI*, ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun. Car 1°. $BA=BH$; puisque ce sont les côtés du même Quarré *AH*. 2°. Les Angles *BAC*, *BHI*, étant droits, sont égaux; & les Angles *ABC*, *HBI*, étant des complémens du même Angle *ABI*, sont aussi égaux. Ainsi (*N*°. 119.) les deux Triangles *BAC*, *BHI*, sont parfaitement égaux; & par conséquent leurs hypothénuses *BC*, *BI*, sont égales: & comme les côtés *BC*, *BE*, du même Quarré *BG*, sont égaux, on aura aussi $BE=BI$.

Les deux Parallélogrammes *BF*, *ABIL*, établis sur les bases égales *BE*, *BI*, & renfermés entre les mêmes Paralleles *EI*, *FL*, sont donc égaux (*N*°. 134.). Mais le Parallélogramme *ABIL* & le Quarré *AH*, sont aussi égaux (*N*°. 133.). Donc le Rectangle *BF* & le Quarré *AH* sont égaux.

2°. On prouvera de la même maniere que les Triangles rectangles *BAC*, *MOC*, sont parfaitement égaux, ayant un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun, savoir $CA=CO$, & les Angles *BAC*, *ACB*, égaux aux Angles *O*, *OCM*; & par conséquent les hypothénuses *BC*, *MC*, de ces Triangles, seront égales: & comme $BC=CG$, il en résultera que $CG=MC$, & que les Parallélogrammes *CF*, *ACML*, compris entre mêmes Paralleles, & établis sur ces bases égales *CG*, *MC*, sont égaux (*N*°. 134.). Mais le Parallélogramme *ACML* & le Quarré *AO* sont aussi égaux (*N*°. 133.). Donc le Parallélogramme rectangle *CF* & le Quarré *AO* seront aussi égaux.

Nous avons donc démontré que la Perpendiculaire *ADF*, tirée de l'Angle droit *A* sur l'hypothénuse *BC*, divise le Quarré de l'hypothénuse en deux Rectangles *BF*, *CF*, égaux aux deux Quarrés *AH*, *AO*, des côtés de l'Angle droit; & que le Quarré entier *B G* de l'hypothénuse est par conséquent égal à la somme *A H* + *A O* des Quarrés constuits sur les côtés *A B*, *A C*, de l'Angle droit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Quoiqu'il importe peu, pour la démonstration du Théorême, de savoir en quel Point le prolongement AL *de la Droite* AD *rencontre le prolongement de la Droite* HK, *il est bon de remarquer que ce prolongement* AL *doit nécessairement passer par le Point où se rencontrent les prolongemens des côtés* HK, ON, *des deux Quarrés adjacens à l'Angle droit* BAC.

Car les deux Triangles AKL, BHI, *ayant les côtés parallèles chacun à chacun, ont aussi les Angles égaux chacun à chacun; & leurs côtés correspondans* AK, BH, *étant égaux, ces Triangles sont parfaitement égaux, & donnent par conséquent* KL = HI : *& comme on a trouvé* HI = AC = AN, *il est évident que* KL = AN. *Ainsi pour démontrer que le Point* L *est le Point où se rencontrent les prolongemens des deux Droites* HK, ON, *il suffit de faire voir que la portion du prolongement de* HK, *comprise entre* AK *& le prolongement de* ON, *doit nécessairement être égale à* AN.

Or les prolongemens de HK *& de* ON, *étant paralleles aux deux Droites* AN, AK, *formeront avec ces deux Lignes un Quadrilatere qui aura les côtés opposés paralleles & par conséquent égaux (N°. 129.). Ainsi la portion du prolongement de* HK, *comprise entre* AK *& le prolongement de* ON, *sera nécessairement égale à* AN; *& par conséquent le prolongement de la Droite* AD *perpendiculaire à l'hypothénuse* BC, *passera par le Point où se ren-*

contreront les prolongemens des côtés HK, ON, *des Quarrés adjacens à l'Angle droit.*

COROLLAIRE I.

327 Le Quarré *BG* de l'hypothénuse, & les deux Rectangles *BF*, *CF*, dans lesquels il est divisé, étant compris entre mêmes Paralléles *BC*, *EG*, sont entr'eux comme leurs bases (*N*°. 193.); c'est-à-dire, que $BG : BF : CF :: BC : BD : DC$. Fig. 256.

Donc en mettant les Quarrés *AH*, *AO*, pour les deux Rectangles *BF*, *CF*, ausquels ils sont égaux, l'on aura $BG : AH : AO :: BC : BD : DC$.

C'est-à-dire, que le Quarré de l'hypothénuse *BC* d'un Triangle rectangle, & les deux Quarrés des côtés qui renferment l'Angle droit, sont proportionnels à l'hypothénuse entiere *BC*, & aux parties *BD*, *DC*, de la même hypothénuse divisée par une Perpendiculaire *AD* menée de l'Angle droit sur elle.

COROLLAIRE II.

328 Si dans un même Cercle *BAEFC*, l'on tire par une extrémité *B* du Diametre tant de Cordes *BA*, *BE*, *BF*, qu'on voudra, & que des extrémités *A*, *E*, *F*, de ces Cordes, l'on abaisse sur le Diametre *BC* des Perpendiculaires *AD*, *EG*, *FH*; on aura Fig. 257.

$$\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD : BG : BH.$$

Car si des extrémités *A*, *E*, *F*, des Cordes *BA*, *BE*, *BF*, qui partent d'un même bout *B* du Diametre, on mene d'autres Cordes *AC*, *EC*, *FC*, à l'autre bout *C* du même Diametre, les Triangles *BAC*, *BEC*, *BFC*, compris dans le Demi-cercle, seront rectangles. Ainsi en construisant un Quarré

BN sur le Diametre *BC*, qui est l'hypothénuse commune à tous ces Triangles, & prolongeant les Perpendiculaires *AD*, *EG*, *FH*, au travers de ce Quarré, l'on aura (*N°.* 326.)

$$\overline{BC}^2 = BN, \overline{BA}^2 = BK, \overline{BE}^2 = BL, \overline{BF}^2 = BM.$$

Mais (*N°*. 193.) $BN : BK : BL : BM :: BC : BD : BG : BH.$
Donc on aura aussi

$$\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD : BG : BH.$$

C'est-à-dire, que le Quarré du Diametre d'un Cercle, & les Quarrés de toutes les Cordes qui partent d'une extrémité *B* du Diametre, sont proportionnels au Diametre, & aux parties de ce Diametre comprises entre la même extrémité *B*, & les Perpendiculaires abaissées des extrémités des Cordes sur ce Diametre.

Fig. 258, 259, 260 & 261. 329 *Ce second Corollaire fournit un moyen facile pour trouver des Lignes droites proportionnelles à tant de Figures semblables* X, Y, Z, *&c qu'on voudra, dont on connoîtra les Lignes homologues* bc, ba, be, *&c.*

Car si sur une Droite BC *égale à la Ligne* bc *de la plus grande Figure* X, *on décrit un Demi-cercle* BEAC, *& qu'ayant fait les Cordes* BA, BE, *&c égales aux Lignes* ba, be, *homologues à* bc, *l'on abaisse des extrémités de ces Cordes, des Perpendiculaires* AD, EF, *&c. au Diametre* BC;

On aura X : Y : Z : *&c* :: BC : BD : BF : *&c.*
En voici la démonstration.

Les Figures X, Y, Z, *&c étant semblables*, *&* bc, ba, be, *&c étant leurs Lignes homologues, on aura* (*N°*. 319.) $X : Y : Z : \&c :: \overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2 : \&c.$

Mais (*N°*. 328.) $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2 : \&c$ ou $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \&c :: BC : BD : BF : \&c.$

Donc on aura aussi X : Y : Z : &c : : BC : BD : BF : &c ; *c'est-à-dire, que les Droites* BC, BD, BF, &c *seront proportionnelles aux Figures semblables* X, Y, Z, &c.

THÉORÊME.

330 *Si trois Figures semblables* X, Y, Z, *forment par leurs Lignes homologues* BC, BA, AC, *un Triangle rectangle* BAC, *& qu'on abaisse une Perpendiculaire* AD *de l'Angle droit sur l'hypothénuse* BC ; Fig. 263.

On aura { 1°. X : Y : Z : : BC : BD : DC.
2°. X = Y + Z.

DÉMONSTRATION.

Puisque les trois Figures *X*, *Y*, *Z*, sont semblables, & que *BC*, *BA*, *AC*, sont des Lignes homologues terminées par des Points semblablement placés à l'égard de ces Figures,

On aura $X : Y : Z : : \overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2$ (*N*°. 319.).

Mais (*N*°. 327.) $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2 : : BC : BD : DC$.

Donc on aura 1°. *X* : *Y* : *Z* : : *BC* : *BD* : *DC*. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Il suit de là qu'on aura *X* : *Y* + *Z* : : *BC* : *BD* + *DC* (*N*°. 215.). Mais *BC* = *BD* + *DC*.

Donc on aura aussi *X* = *Y* + *Z*. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

331 Donc si trois Polygones semblables *X*, *Y*, *Z*, forment par leurs côtés homologues *BC*, *BA*, *AC*, un Triangle rectangle *BAC*, & qu'on abaisse une Perpendiculaire *AD* de l'Angle droit sur l'hypothénuse *BC* ; Fig. 264.

On aura $\begin{cases} 1^o.\ X : Y : Z :: BC : BD : DC. \\ 2^o.\ X = Y + Z. \end{cases}$

Car les côtés homologues de trois Figures semblables, sont des Lignes homologues de ces Figures. Ainsi les trois Polygones *X*, *Y*, *Z*, sont dans le cas des Figures semblables du Théorême.

Corollaire II.

Fig. 265, 266, 267 & 268. 332 Donc si trois Polygones semblables *X*, *Y*, *Z*, tous trois inscrits, ou tous trois circonscrits, ou qui ont trois Angles correspondans aux Circonférences de trois Cercles, ou enfin qui ont chacun trois côtés homologues touchans des Cercles, forment par des Lignes égales aux Rayons ou aux Diametres de leurs Cercles, un Triangle rectangle *BAC*, & qu'on abaisse une Perpendiculaire *AD* de l'Angle droit sur l'hypothénuse de ce Triangle ;

1°. Les trois Polygones qui répondront aux trois côtés *BC*, *BA*, *AC*, du Triangle rectangle, seront proportionnels à *BC*, *BD*, *DC*.

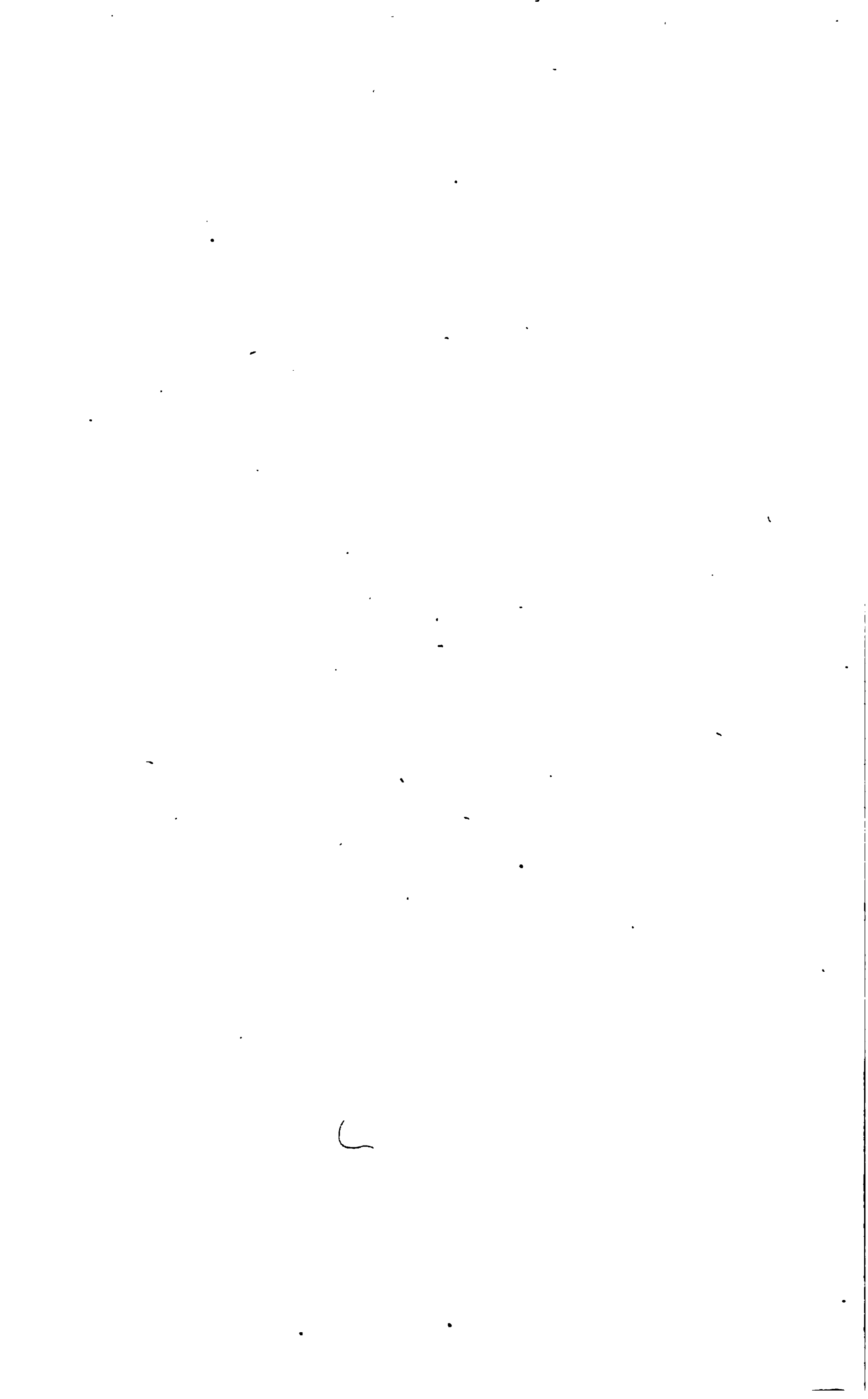
2°. Le Polygone qui répondra à l'hypothénuse sera égal à la somme des deux autres.

Car les Rayons ou les Diametres des Cercles qui appartiennent à ces Polygones, sont des Lignes homologues. Ainsi ces trois Polygones sont encore dans le cas de ceux du Théorême.

Corollaire III.

Fig. 269 & 270. 333 Donc si trois Droites *BC*, *BA*, *AC*, égales aux Rayons ou aux Diametres de trois Cercles *X*, *Y*, *Z*, forment un Triangle rectangle *BAC*, & qu'on abaisse une Perpendiculaire *AD* de l'Angle droit de ce Triangle sur son hypothénuse ;

On



On aura $\begin{cases} 1^{o}. \ X:Y:Z::BC:BD:DC. \\ 2^{o}. \ X=Y+Z. \end{cases}$

Car trois Cercles peuvent être regardés comme trois Polygones ſemblables d'une infinité de côtés, tous trois inſcrits ou tous trois circonſcrits à des Cercles, & ſont par conſéquent dans le cas des Polygones du Corollaire précédent.

Avertiſſement.

Après avoir démontré dans le pénultiéme Théorême les Rapports de trois Quarrés qui forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle, on a eu recours à la propriété que les Figures ſemblables ont d'être proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues, pour démontrer dans le dernier Théorême les Rapports de toutes les Figures ſemblables qui forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle. Mais l'ordre qu'on a ſuivi n'étoit pas néceſſaire; & l'on en va ſuivre un tout oppoſé, qui n'eſt ni moins ſimple, ni moins naturel.

On va donc, indépendamment de la propriété que les Figures ſemblables ont d'être proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues, démontrer les Rapports des Figures ſemblables qui forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle.

THÉORÊME.

334 *Si trois Triangles ſemblables* BEC, BHA, AOC, *forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle* BAC, *& qu'ayant abaiſſé une Perpendiculaire* AD *de l'Angle droit* A *de ce Triangle ſur ſon hypothénuſe, on mene* DE *au ſommet du Triangle* BEC *conſtruit ſur l'hypothénuſe;* Fig. 262.

On aura { 1°. *Le Triangle* BED=BHA. 2°. *Le Triangle* DCE=AOC. 3°. *Et par conséquent* BEC=BHA+AOC.

DÉMONSTRATION.

La Droite *AD* menée de l'Angle droit du Triangle *BAC* perpendiculairement sur son hypothénuse *BC*, divise ce Triangle en deux autres Triangles rectangles *BDA*, *ADC*, qui lui sont semblables. Car outre que le Triangle total *BAC*, & les deux Triangles *BDA*, *ADC*, dans lesquels il est partagé, ont chacun un Angle droit, les deux derniers *BDA*, *ADC*, ont chacun un Angle aigu commun avec le premier *BAC*.

1°. Les Triangles semblables *BDA*, *BAC*, donneront *BD* : *BA* :: *BA* : *BC*.

Mais les deux Triangles *BHA*, *BEC*, étant semblables (*hyp.*), on aura *BA* : *BC* :: *BH* : *BE*.

Donc *BD* : *BA* :: *BH* : *BE*. Ainsi les deux Triangles *BED*, *BHA*, ont les côtés réciproques autour de leur Angle égal *B*, & sont par conséquent égaux (*N°*. 195.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. Les Triangles semblables *ADC*, *BAC*, donneront *CD* : *CA* :: *CA* : *CB*.

Mais les deux Triangles *AOC*, *BEC*, étant semblables (*hyp.*), on aura *CA* : *CB* :: *CO* : *CE*.

Donc *CD* : *CA* :: *CO* : *CE*. Ainsi les deux Triangles *DCE*, *AOC*, ont les côtés réciproquement proportionnels autour de leur Angle égal *C*, & sont par conséquent égaux (*N°*. 195.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 262. 335 Puisque les Triangles *BED*, *DCE*, sont égaux aux Triangles *BHA*, *AOC*, on aura

$BEC:BHA:AOC::BEC:BED:DCE$.
Mais (*N°*. 194.) $BEC:BED:DCE::BC:BD:DC$.
Donc $BEC:BHA:AOC::BC:BD:DC$.
C'est-à-dire, que si des Triangles semblables forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle BAC, & qu'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit de ce Triangle sur son hypothénuse, le Triangle BEC qui occupera l'hypothénuse, & les deux autres BHA, AOC, qui occuperont les côtés de l'Angle droit, seront proportionnels à l'hypothénuse entiere BC, & à ses parties BD, DC.

COROLLAIRE II.

336 Si trois Polygones semblables $BCEFG$, $BAHIK$, $ACMNO$, forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle BAC, celui qui occupera l'hypothénuse sera lui seul égal à la somme des deux autres, qui occuperont les côtés de l'Angle droit; & si l'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse, on aura Fig. 271.
$BCEFG:BAHIK:ACMNO::BC:BD:DC$.

Car si l'on divise ces trois Polygones en Triangles, par des Lignes tirées des Angles correspondans aux autres Angles, les Triangles correspondans de ces trois Polygones seront semblables chacun à chacun (*N°*. 268.).

1°. Les trois Triangles correspondans BCE, BAH, ACM, étant semblables, & formant par leurs côtés homologues le Triangle rectangle BAC, l'on aura $BCE = BAH + ACM$ (*N°*. 334.), & $BCE:BAH:ACM::BC:BD:DC$ (*N°*. 335.).

2°. Les trois Triangles suivans BEF, BHI, AMN, seront aussi semblables; & leurs côtés homologues EF, HI, MN, qui sont des côtés correspondans des trois Polygones proposés, étant proportionnels aux

trois côtés correſpondans BC, BA, AC, qui forment le Triangle rectangle BAC, formeront, quand on le voudra, un autre Triangle rectangle qui ſera ſemblable au Triangle BAC; & la Perpendiculaire qu'on ménera de l'Angle droit de ce nouveau Triangle ſur ſon hypothénuſe, diviſera cette hypothénuſe en parties proportionnelles à BC, BD, DC: d'où il ſuit que le Triangle BEF, qui occupera l'hypothénuſe de ce nouveau Triangle rectangle, ſera égal à la ſomme $BHI+AMN$ des deux autres, & que ces trois Triangles ſeront entr'eux comme l'hypothénuſe & les parties de l'hypothénuſe du nouveau Triangle rectangle. Or cette hypothénuſe & ſes parties étant proportionnelles à BC, BD, DC, l'on aura
$BEF : BHI : AMN :: BC : BD : DC$.

3°. On démontrera de la même maniere que
$BFG = BIK + ANO$,
& que $BFG : BIK : ANO :: BC : BD : DC$.

Les Triangles dans leſquels on a diviſé le Polygone de l'hypothénuſe, étant égaux à la ſomme des Triangles ſemblables correſpondans, dans leſquels on a diviſé les Polygones qui occupent les côtés de l'Angle droit; étant auſſi prouvé que les Triangles du Polygone de l'hypothénuſe, & les Triangles correſpondans des deux autres Polygones, ſont proportionnels à BC, BD, DC; il eſt clair que le Polygone entier $BCEFG$ de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme $BAHIK + ACMNO$ des deux autres, & que $BCEFG : BAHIK : ACMNO :: BC : BD : DC$.

COROLLAIRE III.

Fig. 263. 337 Donc ſi trois Polygones ſemblables forment par trois Lignes homologues un Triangle rectangle BAC, & que l'on abaiſſe une Perpendiculaire

AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse, le Polygone qui répondra à l'hypothénuse sera égal à la somme des deux autres ; & ces trois Polygones qui occuperont les côtés *BC*, *BA*, *AC*, du Triangle rectangle, seront proportionnels à *BC*, *BD*, *DC*.

Car les Lignes homologues des Polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues de ces Figures. Donc si trois Polygones semblables forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle *BAC*, ils pourront aussi former par leurs côtés homologues un Triangle semblable au premier *BAC* ; d'où il suit qu'ils seront dans le cas du Corollaire précédent.

COROLLAIRE IV.

338 Donc si trois Quarrés *BG*, *AH*, *AO*, forment par leurs côtés un Triangle rectangle *BAC*, celui *BG* de l'hypothénuse sera égal à la somme *AH*+*AO* des deux autres. Fig. 250.

Et si l'on abaisse une Perpendiculaire *AD* de l'Angle droit du Triangle rectangle sur son hypothénuse *BC*, les trois Quarrés *BG*, *AH*, *AO*, seront proportionnels à *BC*, *BD*, *DC*.

Car trois Quarrés sont trois Figures semblables, & sont par conséquent dans le cas du Corollaire second.

On s'abstient de tirer du Théorême un plus grand nombre de Corollaires, & l'on se contente d'avertir qu'on doit encore déduire du Corollaire III deux Corollaires absolument semblables à ceux des Paragraphes 332 & 333.

REMARQUE.

339 La Théorie établie dans le dernier Théorême & ses Corollaires, conduit naturellement à

conclurre que les Figures semblables sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues.

Fig. 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, & 270. Car si l'on fait un Angle droit *BAC*, qui ait pour côtés des Lignes homologues ou des Droites égales aux Lignes homologues de deux Figures semblables *Y* & *Z*, & qu'après avoir tiré l'hypothénuse *BC*, l'on abaisse une Perpendiculaire *AD*, de l'Angle droit sur son hypothénuse, on aura $Y : Z :: BD : DC$ (N°. 334.).

Mais si l'on fait ou que l'on imagine deux Quarrés construits sur les mêmes côtés *AB*, *AC*, de l'Angle droit, on aura aussi $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$.

Donc on aura $Y : Z :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$; c'est-à-dire, que deux Figures semblables seront proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues.

Il suit de là que deux Figures semblables, toutes deux inscrites ou toutes deux circonscrites, ou dont trois côtés homologues toucheront deux Cercles, ou dont trois Angles correspondans seront à la Circonférence de deux Cercles, seront proportionnelles aux Quarrés des Rayons, ou aux Quarrés des Diametres de leurs Cercles. Enfin l'on en conclurra que les surfaces de deux Cercles sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons, ou aux Quarrés de leurs Diametres.

Le Théorême des trois Figures semblables construites sur les côtés d'un Triangle rectangle, étant le fondement de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication & de la Division des Figures semblables, lorsqu'on veut que le Résultat soit encore semblable aux Figures données ; l'ordre demande qu'on n'éloigne pas trop ces quatre opérations de ce Théorême. Ainsi nous allons les expliquer dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

De l'Addition, Soustraction, Multiplication & Division des Figures semblables.

DE L'ADDITION DES FIGURES SEMBLABLES.

PROBLÊME.

340 *ETANT données tant de Figures semblables qu'on voudra, en trouver une qui soit égale à leur somme, & qui leur soit semblable.*

SOLUTION.

Après avoir déterminé les Lignes homologues des Figures que l'on doit ajoûter, on mettra d'abord à Angle droit les Lignes homologues *AB*, *AC*, de deux de ces Figures; puis on tirera l'hypothénuse *BC* qui sera une Ligne homologue d'une Figure semblable & égale à la somme des deux premieres qui ont *AB*, *AC*, pour Lignes homologues: en sorte que si l'on ne doit ajoûter ensemble que les deux Figures dont *AB* & *AC* sont les Lignes homologues, le Problême se réduira à faire sur l'hypothénuse *BC*, comme Ligne homologue, une Figure semblable à celles qu'on propose d'ajoûter ensemble. Fig. 272.

Si l'on doit ajoûter une troisiéme Figure aux deux premieres, on élévera au bout de l'hypothénuse *BC* une Perpendiculaire *CD* égale au côté homologue de la troisiéme Figure; & l'on tirera l'hypothénuse *BD*, qui sera la Ligne homologue d'une Figure

ſemblable & égale à la ſomme des deux Figures qui ont *B C* & *C D* pour Lignes homologues, ou à la ſomme des trois Figures qui ont *AB*, *AC*, *CD*, pour Lignes homologues: parce que nous avons vû que la Figure qui a *BC* pour Ligne homologue, eſt égale à la ſomme des deux Figures ſemblables qui ont *AB*, *AC*, pour Lignes homologues.

Si l'on vouloit encore ajoûter une quatriéme Figure, on méneroit à la ſeconde hypothénuſe *B D*, & par ſon extrémité, une nouvelle Perpendiculaire *D E* égale à la Ligne homologue de la quatriéme Figure; puis on tireroit une troiſiéme hypothénuſe *BE*, qui ſeroit la Ligne homologue d'une Figure ſemblable aux précédentes, & égale à la ſomme des deux Figures qui auroient *B D*, *D E*, pour Lignes homologues, ou à la ſomme des quatre Figures qui auroient *AB*, *AC*, *CD*, *DE*, pour Lignes homologues: en ſorte que le Problême ſe réduiroit alors à faire (*N*°. 270.) ſur *BE*, comme Ligne homologue, une Figure ſemblable à l'une de celles qui ſont données; & ainſi des autres Figures que l'on aura à ajoûter.

1°. *Si les Figures ſemblables ſont rectilignes; comme les côtés homologues ſont les Lignes homologues les plus faciles à déterminer, & qu'il eſt plus aiſé de faire des Figures ſemblables ſur des côtés homologues, que ſur des Lignes homologues qui ne ſont pas côtés, on prendra les côtés homologues des Figures propoſées, pour les diſpoſer comme nous l'avons dit dans le Problême.*

2°. *Si les Figures ſemblables qu'on doit ajoûter enſemble ſont des Cercles; comme les Rayons ou les Diametres des Cercles ſont les Lignes homologues ſur leſquelles il eſt le plus facile de conſtruire des Cercles, on prendra les Rayons ou les Diametres de ces Cercles pour leurs Lignes homologues: & lorſqu'on aura diſpoſé ces Rayons ou ces Diametres, conſidérés comme Lignes homologues,*

de la maniere qu'il a été dit dans le Problême, le Cercle qu'on fera sur la derniere hypothénuse, prise pour Rayon ou pour Diametre, sera égal à la somme de tous les Cercles dont on aura employé les Rayons ou les Diametres.

COROLLAIRE.

341 Nous avons dit qu'une Ligne multipliée par son égale, ou par elle-même, produit un Quarré. Or la Ligne que l'on multiplie par son égale ou par elle-même, se nomme la Racine du Quarré que produit la multiplication; en sorte que le côté d'un Quarré est la Racine de ce Quarré. Cela posé:

1°. *BC* étant l'hypothénuse d'un premier Triangle rectangle *BAC*, l'on aura $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$. Ainsi l'hypothénuse *BC*, qui est la Racine du Quarré $\overline{BC}^2$, sera la Racine de la somme des deux Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$: & pour exprimer la Racine de cette somme, on l'écrit ainsi $\sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$. On aura donc $BC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$; c'est-à-dire, que l'hypothénuse d'un Triangle rectangle sera la Racine quarrée de la somme de deux Quarrés construits sur les côtés de l'Angle droit. Fig. 272.

2°. *BCD* étant un nouveau Triangle rectangle en *C*, qui a pour côté l'hypothénuse du Triangle rectangle précédent, l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$; & à cause que $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$. Ainsi la seconde hypothénuse *BD*, qui est la Racine du Quarré $\overline{BD}^2$, sera égale à la Racine quarrée de la somme des trois Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$; ce qui s'écrit ainsi, $BD = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$.

3°. *BDE* étant un nouveau Triangle rectangle en *C*, qui a pour côté l'hypothénuse du Triangle rectangle précédent, l'on aura $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2$, ou (à cause que $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$) $\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$. Ainsi la troisiéme hypothénuse *BE*, qui est la Racine du Quarré $\overline{BE}^2$, sera égale à la Racine de la somme des quatre Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$; ce qu'on écrira ainsi, $BE = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$.

On voit par là comment on pourra trouver la Racine quarrée de la somme de tant de Quarrés qu'on voudra, & comment on pourra exprimer & représenter la Racine quarrée de cette somme de Quarrés.

Il arrive souvent que les Commençans, pour tirer la Racine quarrée d'une somme de plusieurs Quarrés, prennent la somme des Racines de ces Quarrés. Par exemple, pour extraire la Racine de $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *ils sont tentés de prendre* BA + AC *au lieu de* BC. *Or il est évident qu'en opérant ainsi, ils prennent une Racine trop grande; puisque* (*N°.* 7.) $BA + AC > BC$ *qui est la Racine de la somme des deux Quarrés* $\overline{BA}^2$, $\overline{CA}^2$.

De la Soustraction des Figures semblables.

P B O B L È M E.

342 *Soustraire une Figure d'une autre qui lui est semblable, & faire en sorte que le reste soit une Figure semblable aux deux premieres.*

Solution.

Fig. 263 ou 264. Puisque trois Figures semblables *X*, *Y*, *Z*, qui forment par leurs côtés homologues, ou par leurs

Lignes homologues, un Triangle rectangle *BAC*, font telles (*N°*. 330 ou 331.) que celle *X* de l'hypothénuse est égale à la somme des deux autres *Y*, *Z*, c'est-à-dire, que $X = Y + Z$; il est clair que si l'on retranche la Figure *Y* de celle *X*, le reste sera égal à la Figure *Z*; ou que si l'on retranche la Figure *Z* de la Figure *X*, le reste sera égal à la Figure *Y*: d'où il suit que lorsqu'on aura une Figure quelconque *Y* à soustraire d'une Figure semblable *X*, & qu'on voudra que le reste soit une Figure semblable aux deux premieres, il faudra choisir dans les deux Figures deux Lignes homologues; puis faire un Triangle rectangle *BAC*, dont l'hypothénuse *BC* soit égale à la Ligne homologue de la plus grande Figure, & dont un côté *BA* soit égal au côté homologue de la plus petite, qui doit être retranchée. Cela fait, le troisiéme *AC* sera le côté homologue d'une Figure semblable aux deux premieres & égale au reste de la Soustraction des deux Figures proposées; en sorte que le Problême se réduira à faire sur *AC*, comme Ligne homologue, une Figure semblable à celles qui sont données. Voici maintenant ce qu'il faut faire pour avoir un Triangle *BAC*, tel qu'on vient de le dire.

Ayant tiré une Droite *BC* égale au côté homologue de la plus grande Figure, on décrira sur elle comme Diametre un Demi-cercle *BAC*. Puis ayant tiré par l'extrémité *B* de ce Diametre une Corde *BA* égale au côté homologue de la plus petite Figure, on ménera, par son extrémité *A* & par l'autre extrémité *C* du Diametre, la Corde *AC* qui sera la Ligne homologue d'une Figure semblable aux deux précédentes, & égale au reste qu'on auroit après avoir retranché la Figure qui répond à *BA* de celle qui répond à *BC*. Fig. 273.

Car l'Angle *BAC* ayant le sommet à la Circonférence, & étant appuyé sur le Diametre, est droit. Ainsi le Triangle *BAC* est rectangle, & a par conséquent les conditions que nous avons démontré suffisantes pour résoudre le Problême proposé.

On peut encore construire le Triangle rectangle BAC, *avec les conditions demandées, de la maniere suivante.*

Fig. 274. On commencera par faire un Angle droit *BAD*, dont les côtés soient indéfinis. Puis ayant fait le côté *AB* égal à la Ligne homologue de la Figure qui doit être soustraite, de son extrémité *B*, comme Centre, & d'un Rayon égal à la Ligne homologue de la plus grande Figure, on décrira l'Arc *ECF*, qui coupera le côté *AD* de l'Angle droit en un Point *C*. Ensuite on ménera, si on le juge à propos, la Droite *BC*; & l'on aura par ce moyen un Triangle rectangle *BAC* qui aura les conditions demandées, c'est-à-dire, qui aura pour hypothénuse une Droite *BC* égale à la Ligne homologue de la grande Figure, & pour côté *BA* une Ligne égale à la Ligne homologue de la plus petite Figure qu'on doit retrancher de la plus grande : en sorte que le côté *AC* sera la Ligne homologue d'une Figure semblable aux deux premieres, & égale à leur différence.

1°. *Si les deux Figures proposées, dont l'une doit être soustraite de l'autre, sont rectilignes, leurs côtés homologues seront les Lignes homologues les plus commodes. Ainsi l'on fera bien de prendre leurs côtés homologues pour les Lignes homologues, & en faire usage comme il est expliqué dans le Problême.*

2°. *Si les deux Figures proposées sont des Cercles, les Lignes homologues les plus commodes seront les Rayons ou les Diametres. Ainsi l'on emploiera leurs Rayons ou leurs Diametres comme il a été dit dans le Problême.*

COROLLAIRE.

343 Puisque la Racine quarrée d'un Quarré est le côté de ce Quarré, & que le Triangle BAC étant rectangle en A, l'on a $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$; si l'on tire la Racine quarrée de chaque membre de cette Égalité, l'on aura $AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}$: d'où il suit que si l'on veut avoir la Racine quarrée de la différence de deux Quarrés, il faudra faire, comme nous l'avons expliqué, un Triangle rectangle BAC, qui ait pour hypothénuse le côté BC du plus grand Quarré, & qui ait pour un côté de l'Angle droit une Ligne BA égale au côté du plus petit Quarré; & le troisiéme côté AC de ce Triangle sera la Racine quarrée de la différence des deux Quarrés proposés. Fig. 273 ou 274.

DE LA MULTIPLICATION DES FIGURES SEMBLABLES.

Il ne s'agit point ici de la Multiplication des Figures semblables par des Lignes, & encore moins de la Multiplication des Figures semblables entr'elles, mais seulement de la Multiplication des Figures par des nombres abstraits; c'est-à-dire, qu'on se propose d'expliquer comment on peut faire une Figure multiple d'une Figure donnée, & qui soit semblable à cette Figure donnée.

PROBLÉME.

344 *Faire une Figure qui soit un multiple d'une Figure* X *donnée, c'est-à-dire, qui contienne un certain nombre de fois la Figure proposée* X, *& qui soit de plus semblable à cette Figure proposée.* Fig. 276 ou 277.

SOLUTION.

Fig. 275 & 276, ou 275 & 277. Ayant tiré une Droite indéfinie *BZ*, & par un Point *D* quelconque ayant élevé sur elle une Perpendiculaire *DA*, l'on prendra à volonté la partie *BD*, qui répondra à la Figure donnée; puis on fera *BC* autant multiple de *BD*, que la Figure demandée le doit être de la Figure proposée *X*.

Sur *BC*, comme Diametre, on décrira un Demicercle qui rencontrera la Perpendiculaire indéfinie *DA* en quelque Point *A*; & par le Point *A*, l'on ménera aux extrémités du Diametre les deux Cordes *AB*, *AC*, qui feront nécessairement entr'elles un Angle droit (*N°*. 91.).

Enfin sur la Corde *AB*, qui est du côté de *BD* qui répond à la Figure donnée, l'on prendra *AE* égale à une Ligne *MN* de la Figure proposée *X*. Puis on ménera *EF* paralléle au Diametre *BC*: & cette Droite *EF*, comprise entre les côtés de l'Angle droit *BAC*, sera une Ligne de la Figure demandée, homologue à la Ligne *MN* de la Figure *X* proposée. Ainsi le reste du Problême se réduit à faire sur *EF*, comme Ligne homologue à *MN*, une Figure semblable à la Figure *X*; & la Figure qu'on fera contiendra la Figure *X* autant de fois qu'on le demande. En voici la Démonstration.

La Figure semblable à *X*, qu'on fera sur *EF* comme Ligne homologue à *MN*, contiendra la Figure *X*, qui a *AE* ou *MN* pour Ligne homologue, autant de fois que *EF* contient *EG* (*N°*. 330.).

Mais *EF* étant (*Constr.*) paralléle à *BC*, l'on aura (*N°*. 262.) *EF* : *EG* : : *BC* : *BD*.

Mais (*Constr.*) *BC* contient *BD* autant de fois que la Figure demandée doit contenir la Figure proposée *X*.

Donc la Figure semblable à X, qu'on fera sur EF comme côté homologue à MN, contiendra la Figure X autant de fois qu'on le demande, & sera par conséquent la Figure qu'il falloit trouver.

Si l'on avoit pris des deux côtés de la Perpendiculaire AD *deux parties* BD, DC, *proportionnelles à la Figure* X *proposée & à la Figure demandée, & qu'on eût suivi le reste de la construction, il auroit fallu prendre* AF, *& non pas* EF, *pour la Ligne de la Figure demandée, homologue à la Ligne* MN *de la Figure* X *proposée.* Fig. 276 & 278, ou 277 & 278.
Puis il auroit fallu construire sur AF, *comme Ligne homologue à* MN, *une Figure semblable à la proposée* X: *& cette Figure auroit été la Figure demandée.*

Car la Figure que l'on construiroit sur AF *seroit à celle* X, *construite sur* MN = AE, *comme* GF *est à* EG.

Mais GF : EG : : DC : BD; *&* (Constr.) DC *&* BD *sont proportionnelles à la Figure demandée, & à la Figure proposée.*

Donc la Figure que l'on construiroit sur AF *seroit à la Figure proposée* X *dans le Rapport demandé, & seroit par conséquent la Figure demandée.*

On doit remarquer que si la Figure qu'on propose de multiplier est rectiligne, il sera plus facile, pour l'opération qu'on vient d'expliquer, de prendre un de ses côtés que toute autre Ligne. Mais si la Figure proposée est une Figure inscrite ou circonscrite à un Cercle, ou si elle est un Cercle; il sera plus commode d'opérer sur le Rayon ou sur le Diametre, que sur toute autre Ligne.

Si la Figure proposée doit être multipliée par un nombre entier, par exemple, par 3, le Problême se réduira à ajoûter ensemble trois Figures égales à la Figure proposée. Ainsi l'on pourra faire la Multiplication par les Régles qui ont été expliquées pour l'Addition.

COROLLAIRE.

345 On a quelquefois beſoin de Lignes qui ſoient multipliées par des Racines quarrées de nombre entier; par exemple, on peut avoir beſoin de multiplier une Ligne AB par $\sqrt{2}$ ou par $\sqrt{3}$ &c. Or ces ſortes de Lignes ſont toûjours les Racines quarrées de Quarrés multiples de $\overline{AB}^2$, & dont la multiplication eſt exprimée par le nombre qui eſt ſous le Signe de la Racine. Par exemple, $AB \times \sqrt{2} = \sqrt{2\overline{AB}^2}$; $AB \times \sqrt{3} = \sqrt{3\overline{AB}^2}$: & ainſi des autres.

Car $2\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$; & $3\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 :: 3 : 1$; &c: & tirant les Racines quarrées des termes de ces Proportions, l'on aura

$\sqrt{2\overline{AB}^2} : AB :: \sqrt{2} : 1$, & $\sqrt{3\overline{AB}^2} : AB :: \sqrt{3} : 1$.

Enfin faiſant le produit des Extrêmes & celui des Moyens, l'on aura $\sqrt{2\overline{AB}^2} = AB \times \sqrt{2}$, & $\sqrt{3\overline{AB}^2} = AB \times \sqrt{3}$.

Mais $\sqrt{2\overline{AB}^2}$ & $\sqrt{3\overline{AB}^2}$ ſont les côtés de deux Quarrés, dont l'un eſt double du Quarré $\overline{AB}^2$, & dont l'autre eſt triple du Quarré $\overline{AB}^2$: & ainſi des autres.

Donc ces expreſſions $AB \times \sqrt{2}$, $AB \times \sqrt{3}$, repréſentent les côtés de deux Quarrés, dont l'un eſt double du Quarré $\overline{AB}^2$, & dont l'autre eſt triple du Quarré $\overline{AB}^2$.

Or $\overline{AB}^2$ ou AB étant donné, on trouve par le Problême

Problême qu'on vient d'expliquer, le côté du Quarré $2\overline{AB}^2$, & celui du Quarré $3\overline{AB}^2$, &c. Ainsi ce Problême donne le moyen de représenter par des Lignes ces expressions $AB \times \sqrt{2}$, $AB \times \sqrt{3}$, & toutes les autres expressions semblables.

DE LA DIVISION DES FIGURES EN D'AUTRES FIGURES SEMBLABLES.

Nous avons expliqué (*N*o. 329.) la maniere de trouver des Lignes proportionnelles à des Figures semblables. Ainsi, puisqu'on trouve aisément combien de fois une Ligne est contenue dans une autre, on est en état de trouver combien de fois la plus petite de deux Figures semblables est contenue dans la plus grande. Nous avons aussi expliqué la maniere de diviser une Figure en plusieurs parties qui soient dans des Rapports donnés ; mais comme les parties résultantes de la Division n'étoient point semblables à la Figure divisée, il nous reste à faire voir comment on peut partager une Figure proposée quelconque en plusieurs autres Figures qui lui soient semblables.

PROBLÊME.

346 *Diviser une Figure proposée* X, *en parties qui lui soient semblables, & proportionnelles à des Nombres donnés, ou à des Lignes données* bd, de, ef, fc. Fig. 279 & 281, ou 280 & 281.

SOLUTION.

Ayant tiré une Droite *BC* égale à une Ligne *bc* la plus commode de la Figure *X*, & l'ayant divisée (*N*o. 263.) en parties *BD*, *DE*, *EF*, *FC*, proportionnelles aux Nombres donnés, ou aux Lignes données *bd*, *de*, *ef*, *fc*, qui sont en mêmes

Rapports que les parties dans lesquelles on doit diviser la Figure *X*, on décrira sur elle comme Diametre un Demi-cercle *BAC*; & par les extrémités *D*, *F*, des parties extrêmes, on élévera sur ce Diametre des Perpendiculaires *DA*, *FG*, qui rencontreront la Demi-circonférence en quelques Points *A*, *G*; puis on ménera les Cordes *AB*, *GC*, sur lesquelles, comme Lignes homologues à *bc*, l'on construira deux Figures semblables à la Figure *X*: & ces deux Figures seront deux parties de la Figure *X*, correspondantes aux deux proportionnelles *bd*, *fc*.

Pour trouver les autres parties de la Figure *X*, correspondantes aux autres proportionnelles *de*, *ef*, on portera les parties moyennes *DE*, *EF*, du Diametre en *BQ* & *BP*; de maniere qu'elles ayent pour origine commune une extrémité *B* du Diametre. Puis ayant élevé sur le Diametre les Perpendiculaires *QN*, *PM*, on tirera à la même extrémité *B* du Diametre, les Cordes *NB*, *MB*, sur lesquelles, comme Lignes homologues à *bc*, l'on construira des Figures semblables à la Figure *X*; & ces nouvelles Figures seront les autres parties de la Figure *X*, correspondantes aux autres proportionnelles *de*, *ef*.

Ainsi les Figures semblables à *X*, que l'on construira sur les Cordes *AB*, *GC*, *NB*, *MB*, considérées comme Lignes homologues à *bc*, seront les parties dans lesquelles la Figure proposée *X* doit être divisée.

Pour démontrer que cette construction est bonne, il y a deux choses à prouver. Premièrement, il faut faire voir que la somme des Figures semblables à la Figure *X*, que l'on construira sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, considérées comme Lignes homologues à *bc*, est égale à la Figure *X* proposée. Ensuite il faut démontrer que les mêmes Figures seront

proportionnelles à *bd*, *de*, *ef*, *fc*, comme on le demande par les conditions du Problême.

1°. La Figure *X* que l'on construira sur le Diametre $BC = bc$, & toutes les autres Figures semblables à *X*, que l'on fera sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, considérées comme Lignes homologues à *BC* ou *bc*, seront (*N°*. 329.) proportionnelles à *BC*, *BD*, *BQ*, *BP*, *FC*, ou à *BC*, *BD*, *DE*, *EF*, *FC*, parce qu'on a fait $BQ = DE$ & $BP = EF$; & par conséquent (*N°*. 217.) la Figure construite sur $BC = bc$ sera à la somme des autres semblables construites sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, comme *BC* est à $BD + DE + EF + FC$.

Mais $BD + DE + EF + FC = BC$.

Donc aussi la somme des Figures construites sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, comme Lignes homologues à *BC* ou *bc*, sera égale à la Figure *X*, dont le côté *bc* est égal au Diametre *BC*. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. On vient de voir que les Figures semblables construites sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, sont proportionnelles à *BD*, *DE*, *EF*, *FC*.

Mais (*Constr.*) les Lignes *BD*, *DE*, *EF*, *FC*, sont proportionnelles aux Lignes données *bd*, *de*, *ef*, *fc*, ou aux Nombres donnés.

Donc les Figures semblables construites sur les Cordes *AB*, *NB*, *MB*, *GC*, considérées comme Lignes homologues, sont aussi proportionnelles aux Lignes données *bd*, *de*, *ef*, *fc*, ou aux Nombres donnés qui doivent être en même raison que ces Lignes. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Donc la construction que l'on a donnée résout le Problême proposé.

COROLLAIRE I.

Fig. 279 & 282, ou 280 & 282. 347 Si la Figure X proposée doit être divisée en parties égales, les Droites bd, de, ef, fc, proportionnelles à ces parties, seront égales; & les parties BD, DE, EF, FC, dans lesquelles on divisera le Diametre BC, seront aussi égales: en sorte que les parties DE, EF, qui sont entre les parties extrêmes de ce Diametre, étant transposées sur ce Diametre, de maniere qu'elles ayent une extrémité commune B avec ce Diametre, se confondront dans toute leur étendue avec la premiere partie BD; & l'on n'aura qu'une seule & même Corde BA correspondante à toutes les parties du Diametre ainsi transposées. Il faudra donc faire sur BA, ou sur plusieurs Droites égales à BA, prises pour Lignes homologues à bc, autant de Figures semblables à X, qu'on voudra avoir de parties de la Figure X.

Ordinairement lorsqu'on divise une Figure en parties égales, on ne demande qu'une de ses parties, les autres étant inutiles.

COROLLAIRE II.

348 Lorsqu'une Ligne est divisée par la Racine quarrée d'un nombre, elle représente toûjours la Racine quarrée du Quarré de la Ligne entiere, divisé par ce nombre. Par exemple, $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ signifie $\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}}$; $\frac{AB}{\sqrt{3}}$ signifie $\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{3}}$: & ainsi des autres.

Car $2 : 1 :: \overline{AB}^2 : \frac{\overline{AB}^2}{2}$, & $3 : 1 :: \overline{AB}^2 : \frac{\overline{AB}^2}{3}$; & ainsi des autres.

Or tirant les Racines quarrées des termes de ces Proportions, l'on aura $\sqrt{2} : 1 :: AB : \sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}}$,

& $\sqrt{3} : 1 :: AB : \sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{3}}$; & par conséquent $\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ & $\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{3}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

Donc pour avoir en Lignes ces expressions $\frac{AB}{\sqrt{2}}$, $\frac{AB}{\sqrt{3}}$, &c, il faudra chercher le côté d'un Quarré égal à la moitié ou au tiers du Quarré construit sur la Ligne AB; c'est-à-dire, qu'il faudra diviser en deux ou en trois Quarrés égaux le Quarré construit sur AB, & trouver le côté de l'une de ces parties, comme il a été expliqué.

COROLLAIRE III.

349 On a quelquefois besoin de ces expressions $AB\times\sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB\times\sqrt{\frac{3}{4}}$, & d'autres semblables, dans lesquelles une Ligne est multipliée par la Racine quarrée d'une Fraction. Ces expressions représentent les Racines quarrées de Quarrés qui sont au Quarré de AB, comme le Numérateur de la Fraction qui est sous le Signe radical est à son Dénominateur.

Ainsi $AB\times\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$; $AB\times\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$. Car $1 : \frac{2}{3} :: \overline{AB}^2 : \frac{2}{3}\overline{AB}^2$; & $1 : \frac{3}{4} :: \overline{AB}^2 : \frac{3}{4}\overline{AB}^2$. Ainsi $1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: AB : \sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$; & $1 : \sqrt{\frac{3}{4}} :: AB : \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$: & $\sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2} = AB\times\sqrt{\frac{2}{3}}$, & $\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2} = AB\times\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Nous ferons encore remarquer que $AB\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $AB\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, sont aussi précisément la même chose que $\sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$, $\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$: & comme $AB\times\sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB\times\sqrt{\frac{3}{4}}$, se réduisent à $\sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$, $\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$, les expressions $AB\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $AB\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, ne différeront pas, pour la valeur, de celles-ci $AB\times\sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB\times\sqrt{\frac{3}{4}}$; & ainsi des autres.

Car $3 : 2 :: 3\overline{AB}^2 : 2\overline{AB}^2$, ou $:: \overline{AB}^2 : \frac{2}{3}\overline{AB}^2$; & $4 : 3 :: 4\overline{AB}^2 : 3\overline{AB}^2$, ou $:: \overline{AB}^2 : \frac{3}{4}\overline{AB}^2$.

Donc en tirant les Racines quarrées des quatre termes de chacune de ces Proportions, l'on aura $\sqrt{3} : \sqrt{2} :: AB : \sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$, & $\sqrt{4} : \sqrt{3} :: AB : \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$; d'où il suit que $\sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2} = AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, & $\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2} = AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

Or nous avons vû (N°. 346.) la maniere de faire un Quarré égal à $\frac{2}{3}\overline{AB}^2$, ou à $\frac{3}{4}\overline{AB}^2$; & ainsi des autres; & comme les côtés de ces Quarrés égaux à $\frac{2}{3}\overline{AB}^2$, ou $\frac{3}{4}\overline{AB}^2$, sont $\sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$, $\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}$, nous avons aussi le moyen d'exprimer en Lignes $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, & $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

CHAPITRE V.

Des Quarrés construits sur les côtés d'un Triangle non rectangle, & sur les côtés & les Diagonales d'un Parallélogramme. De l'Aire d'un Triangle quelconque. Du Quadrilatere inscrit dans le Cercle.

THÉORÊME.

Fig. 283. 350 D*ANS tout Triangle obtusangle* BCD, *si l'on abaisse une Perpendiculaire* DF, *d'un Angle aigu* D, *sur le prolongement du côté* BC *opposé à cet Angle, on aura*

$$1°.\ \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF;$$
$$2°.\ \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF.$$

DÉMONSTRATION.

1°. Les deux Triangles BFD, CFD, étant rectangles en F, on aura

$$\overline{BD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2$$

$$\& \quad \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CF}^2.$$

Et puisque $BF = BC + CF$, on aura (N°. 306.)

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 + 2BC \times CF.$$

On aura donc $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF$. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. Les mêmes Triangles CFD, BFD, rectangles en F, donneront

$$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\& \quad \overline{DF}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BF}^2.$$

Et puisque $CF = BF - BC$, on aura (N°. 307.)

$$\overline{CF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF.$$

On aura donc $\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF$.

Et ajoûtant à chaque membre $-\overline{BC}^2 + 2BC \times BF$, on aura enfin $\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF = \overline{BD}^2$. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE.

351 Le Triangle BCD étant toûjours obtusangle, si d'un Angle aigu D on abaisse une Perpendiculaire DF, sur le prolongement du côté BC opposé à cet Angle, on aura Fig. 283.

$$1°. \; CF = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC};$$

$$2°. \; BF = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC}.$$

Car puisqu'on vient de trouver

$$1^o.\ \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF;$$
$$2^o.\ \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF;$$

Si l'on met encore $-\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2$ dans chaque membre de la premiere Égalité, & $-\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2$ dans chaque membre de la seconde, on aura

$$1^o.\ \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times CF;$$
$$2^o.\ \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times BF.$$

Donc en divisant par $2BC$ chaque membre de ces deux dernieres Égalités, on aura

$$1^o.\ \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = CF;$$
$$2^o.\ \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = BF.$$

THÉORÉME.

Fig. 284. 352 *Dans tout Triangle* ABC, *si d'un Angle* A *l'on abaisse une Perpendiculaire* AE *sur le côté qui lui est opposé, & que cette Perpendiculaire soit renfermée dans le Triangle* BAC, *on aura* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$.

DÉMONSTRATION.

Les deux Triangles AEC, AEB, étant rectangles en E, on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$$
$$\& \quad \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2.$$

Et puisque $EC = BC - BE$, on aura (*N°*. 307.)

$$\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 - 2BC \times BE.$$

On aura donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$.
Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera de la même maniere que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times EC.$$

COROLLAIRE.

353 La Droite AE, perpendiculaire au côté BC, Fig. 284
étant toûjours supposée au dedans du Triangle ABC, on aura le Segment $BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}$.

Car puisque (N°. 352.) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$; si l'on ajoûte à chaque membre $2BC \times BE$, & qu'on en retranche $\overline{AC}^2$, on aura

$$2BC \times BE = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2:$$

& divisant chaque membre par $2BC$, on aura

$$BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}.$$

THÉORÊME.

354 *Dans tout Parallélogramme* ABCD, *les deux* Fig. 285
Quarrés des Diagonales AC, BD, *valent ensemble les Quarrés des quatre côtés* AB, AD, BC, CD; *c'est-à-dire, que* $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$.

DÉMONSTRATION.

Des deux extrémités du côté AD, soient abaissées les Perpendiculaires AE, DF, sur le côté opposé BC: on verra aisément que $BE = CF$, & par conséquent que $2BC \times BE = 2BC \times CF$.

Mais (N°. 352.) le Triangle ABC donnera

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE;$$

& (N°. 350.) le Triangle BCD donnera

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CF.$$

Donc si l'on ajoûte ensemble ces deux Égalités, en supprimant les termes égaux $-2BC\times BE$, $+2BC\times CE$, qui ayant des Signes contraires se détruisent, on aura

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2:$$

& si l'on met $\overline{AD}^2$ pour un des deux $\overline{BC}^2$, on aura

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME.

Fig. 284. 355 *L'Aire d'un Triangle quelconque* ABC *est égale au quart de la Racine quarrée d'un Produit de quatre dimensions fait de la somme des trois côtés, multipliée par la différence de chaque côté à la somme des deux autres; c'est-à-dire, que l'Aire du Triangle* ABC *est égale à*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(AB+BC+AC)\times(AB+BC-AC)\times(AC+AB-BC)\times(AC+BC-AB)}.$$

DÉMONSTRATION.

D'un Angle A du Triangle ABC soit abaissée une Perpendiculaire AE sur le côté opposé BC: on aura (*No.* 353.) $BE=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2BC}$.

Quarrant chaque membre de cette Égalité, on aura

$$\overline{BE}^2=\frac{(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2}{(2BC)^2},$$

& par conséquent $\overline{AB}^2-\overline{BE}^2$ ou $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-\frac{(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2}{(2BC)^2}$.

Multipliant chaque membre par $(2BC)^2$, on aura $(AE)^2\times(2BC)^2=\overline{AB}^2\times(2BC)^2-(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2$.

Prenant la Racine quarrée de chaque membre, & prenant le quart des deux membres qu'on trouvera, on aura $\frac{AE\times BC}{2}$ ou l'Aire du Triangle $ABC=$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\overline{AB}^2\times(2BC)^2-(\overline{AE}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)^2}.$$

Mais (N°. 312.) $\overline{AB}^2 \times (2BC)^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2$ eſt le produit de $AB \times 2BC + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$ par $AB \times 2BC - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$.

Ainſi l'Aire du Triangle ABC eſt égale à

$$\frac{1}{4}\sqrt{(AB \times 2BC + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2) \times (AB \times 2BC - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2)}.$$

Mais (N°. 312.) $AB \times 2BC + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC - \overline{AC}^2$ eſt le produit de $AB + BC + AC$ multiplié par $AB + BC - AC$.

Et $AB \times 2BC - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ ou $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$ eſt le produit de $AC + AB - BC$ multiplié par $AC - AB + BC$.

Donc l'Aire du Triangle ABC eſt égale à

$$\frac{1}{4}\sqrt{(AB+BC+AC) \times (AB+BC-AC) \times (AC+AB-BC) \times (AC+BC-AB)}.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

356 Comme 4 eſt la Racine quarrée de 16, au lieu de prendre le quart de la Quantité

$$\sqrt{(AB+BC+AC) \times (AB+BC-AC) \times (AC+AB-BC) \times (AC+BC-AB)},$$

ou de diviſer cette Racine par 4, on peut la diviſer par $\sqrt{16}$: & l'Aire du Triangle ABC ſera exprimée par

$$\frac{\sqrt{(AB+BC+AC) \times (AC+BC-AC) \times (AC+AB-BC) \times (AC+BC-AB)}}{\sqrt{16}}$$

ou par $\sqrt{\frac{(AB+BC+AC) \times (AB+BC-AC) \times (AC+AB-BC) \times (AC+BC-AB)}{16}}$;

parce que pour prendre la Racine quarrée de la Fraction qui eſt ſous ce dernier Signe radical, il faudra extraire la Racine quarrée de ſon Numérateur, &

celle de son Dénominateur (*Arith.* N°. 142.); ce qui réduira la derniere expression à la précédente.

Mais la Fraction

$$\frac{(AB+BC+AC)\times(AB+BC-AC)\times(AC+AB-BC)\times(AC+BC-AB)}{16}$$

est égale à $\frac{AB+BC+AC}{2}\times\frac{AB+BC-AC}{2}\times\frac{AC+AB-BC}{2}\times\frac{AC+BC-AB}{2}$.

Donc l'Aire du Triangle *ABC* sera aussi exprimée par $\sqrt{\frac{AB+BC+AC}{2}\times\frac{AB+BC-AC}{2}\times\frac{AC+AB-BC}{2}\times\frac{AC+BC-AB}{2}}$.

Mais $\begin{cases}\frac{AB+BC-AC}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}-AC.\\ \frac{AC+AB-BC}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}-BC.\\ \frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}-AB.\end{cases}$

Donc l'Aire du Triangle *ABC* pourra aussi être exprimée par

$$\sqrt{\frac{AB+BC+AC}{2}\times\left(\frac{AB+BC+AC}{2}-AC\right)\times\left(\frac{AB+BC+AC}{2}-BC\right)\times\left(\frac{AB+BC+AC}{2}-AB\right)}.$$

Cette derniere expression de l'Aire du Triangle *ABC*, fait voir qu'on aura l'Aire de ce Triangle, en prenant la Racine quarrée du produit de quatre quantités, dont la premiere sera égale à la moitié de la somme des trois côtés du Triangle *ABC*, & dont les trois autres seront faites de la même demi-somme, dont on retranchera séparément les trois côtés du Triangle.

Par exemple, si les trois côtés *AB*, *BC*, *AC*, du Triangle *ABC*, sont de 4 *Toises*, 15 *Toises*, & 13 *Toises*, on prendra la moitié de la somme de ces trois côtés; & l'on aura 16 Toises.

Puis on retranchera séparément de cette demi-somme chacun des trois côtés; c'est-à-dire, que

On retranchera d'abord 4 Toises de 16 *T*; & l'on aura 12 Toises.

Puis on retranchera 15 Toises de 16 *T*;
& l'on aura 1 Toise.

Ensuite on retranchera 13 Toises de 16 *T*, & l'on aura 3 Toises.

Après quoi l'on multipliera ensemble ces quatre nombres 16, 12, 1, 3, pour n'en faire qu'un seul produit, qui sera 576.

Enfin l'on tirera la Racine quarrée de ce produit: & la Racine 24 qu'on trouvera, signifiera que l'Aire du Triangle *ABC* contient 24 Toises quarrées.

THÉORÊME.

357 *Quand un Quadrilatere* ABCD *est inscrit dans un Cercle, le produit des deux Diagonales* AC, BD, *est égal à la somme des produits des côtés opposés; c'est-à-dire, que* $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Fig. 286.

DÉMONSTRATION.

Soit fait l'*Angle* BAP = l'*Angle* CAD; on aura aussi l'*Angle* BAC = l'*Angle* DAP. Cela posé:

1°. Les Triangles *BAP*, *CAD*, seront semblables (*N*°. 254.). Car l'*Angle* BAP = l'*Angle* CAD (*Construction*); & l'*Angle* ABP = l'*Angle* ACD (*N*°. 90.). Ainsi l'on aura $AB : AC :: BP : CD$; & par conséquent (*N*°. 196.) $AC \times BP = AB \times CD$.

2°. Les deux Triangles *CAB*, *DAP*, seront aussi semblables (*N*°. 254.).

Car outre l'*Angle* BAC = l'*Angle* DAP, on aura encore l'*Angle* ACB = l'*Angle* ADP (*N*°. 90.). Ainsi l'on aura $AC : AD :: BC : PD$; & par conséquent (*N*°. 196.) $AC \times PD = AD \times BC$.

Ajoûtant ces deux Égalités membre à membre, on aura $AC \times BP + AC \times PD = AB \times CD + AD \times BC$, c'est-à-dire, $AC \times (BP + PD)$ ou $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÈME.

Fig. 287. 358 *Si l'on tire les Diagonales* AC, BD, *d'un Quadrilatere* ABCD *inscrit dans un Cercle, la Diagonale* AC *coupera l'autre Diagonale* BE *en deux parties* BE, DE, *proportionnelles aux produits* AB×BC, AD×CD, *des côtés contigus adjacens à cette Diagonale; c'est-à-dire, qu'on aura* BE : DE : : AB×BC : AD×CD.

DÉMONSTRATION.

1°. Les Triangles *AEB*, *DEC*, seront semblables (*N°*. 254.).

Car (*N°*. 90.) l'*Angle* ABE = l'*Angle* DCE; & l'*Angle* BAE = l'*Angle* CDE. Ainsi l'on aura

BE : CE : : AB : CD.

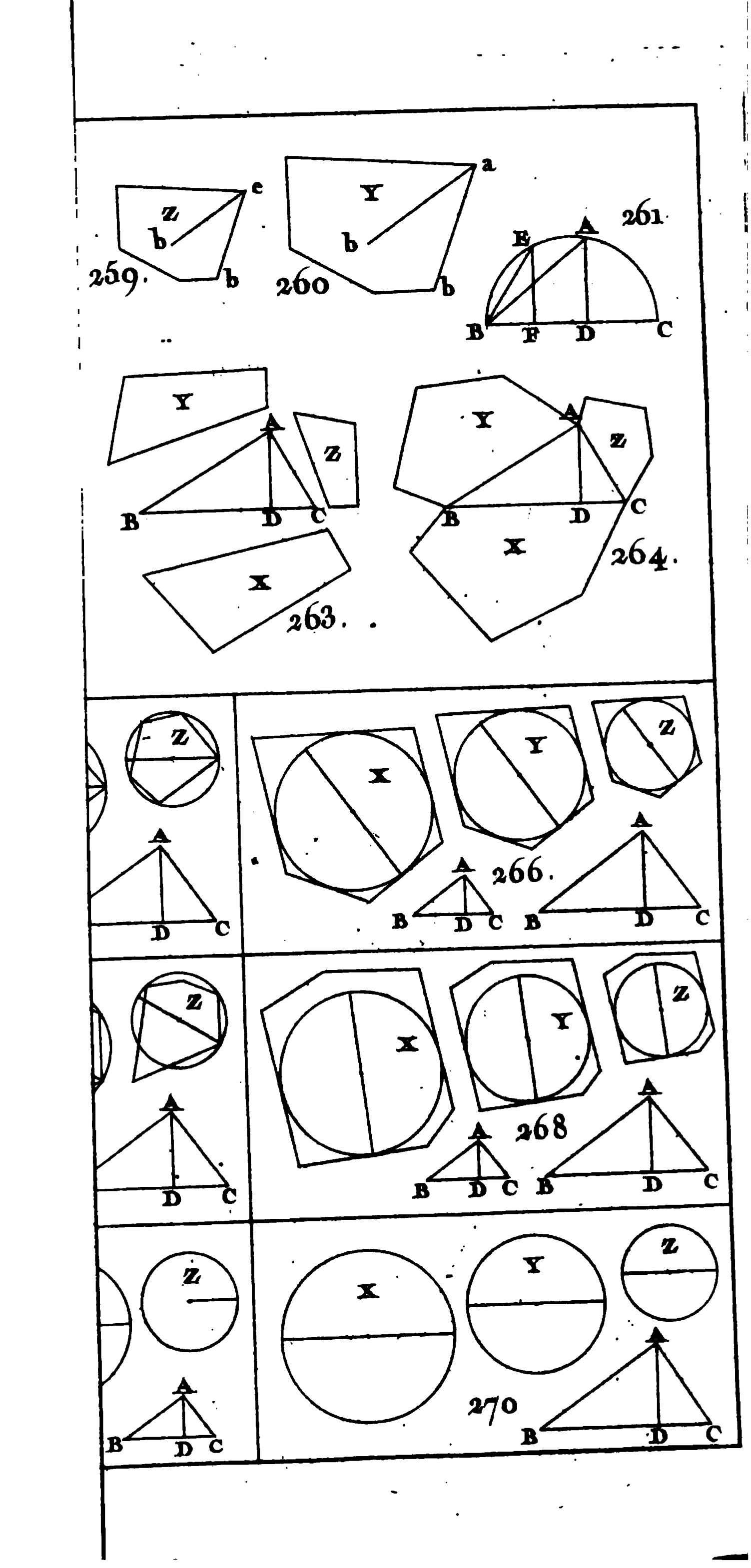
2°. Les Triangles *BEC*, *AED*, seront aussi semblables (*N°*. 254.).

Car (*N°*. 90.) l'*Angle* BCE = l'*Angle* ADE; & l'*Angle* CBE = l'*Angle* DAE. Ainsi l'on aura

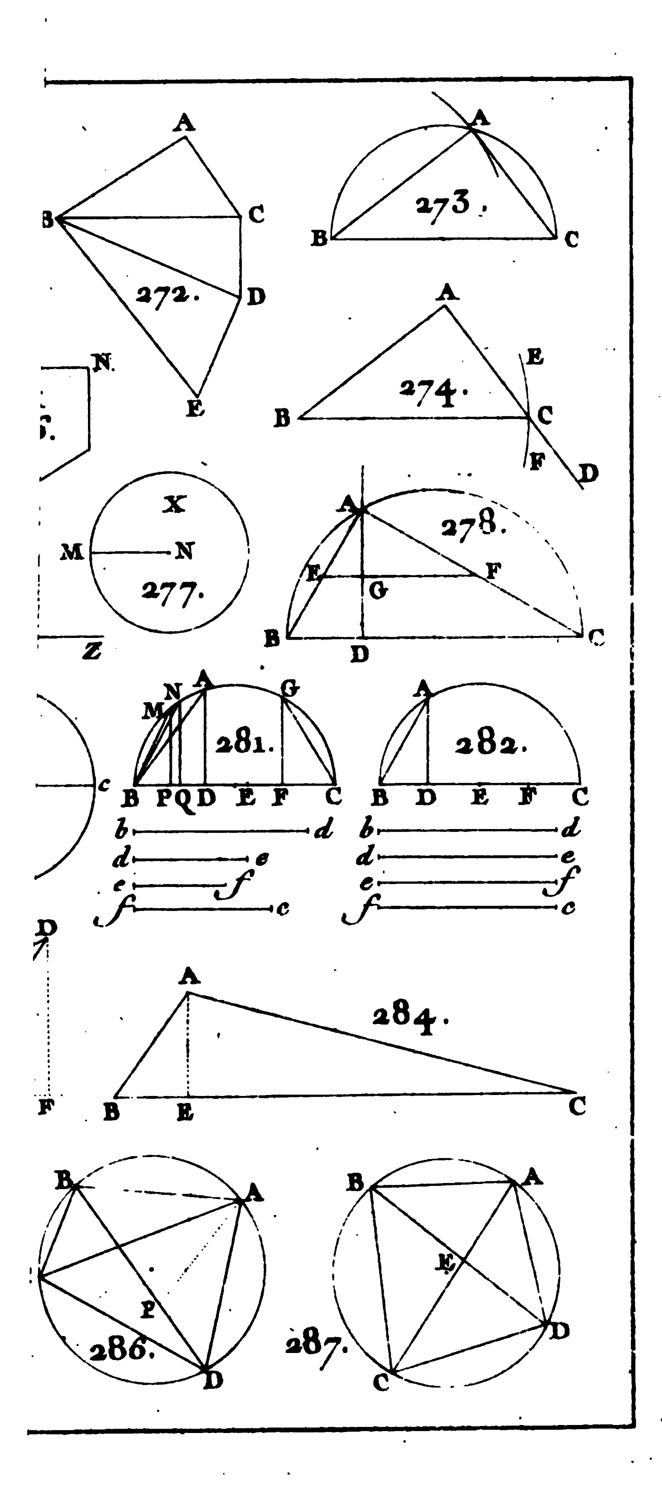
CE : DE : : BC : AD.

Multipliant ces deux Proportions par ordre, en supprimant le terme *CE* qui se trouve parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens, on aura (*N°*. 235.) *BE : DE : : AB × BC : AD × CD.* *Ce qu'il falloit démontrer.*





e
Z
b
259.
b
a
Y
b
260
b
261.
E
A
B
F
D
C
Y
A
Z
B
D
C
X
263.
Y
A
Z
B
D
C
X
264.
Z
A
D
C
X
Y
Z
A
266.
B
D
C
B
A
D
C
Z
A
D
C
X
Y
Z
A
268
B
D
C
B
D
C
Z
A
B
D
C
X
Y
Z
A
270
B
D
C

 272.
A
B
C
D
E
273.
A
B
C
274.
A
B
C
D
E
F
N.
277.
X
M
N
Z
278.
A
B
C
D
E
F
G
281.
A
M
N
G
B P Q D E F C
b d
d e
e f
f c
c
282.
A
B D E F C
b d
d e
e f
f c
284.
A
B
E
C
D
F
286.
B
A
P
D
287.
B
A
E
D
C